Olimpiada Naţională de Matematică 2016
Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A XII-A

Problema 1.

Calculaţi $\int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt[3]{x}} + e^{\sqrt[4]{x}}\right) \mathrm{d}x$.

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $\mathrm{M} = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = \det(A + X) = 0\right\}$.

a) Determinaţi două mulţimi K şi L, părţi stabile ale monoidului $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot\right)$, astfel încât $\mathrm{K} \cup \mathrm{L} = \mathrm{M}$.

b) Este M stabilă în raport cu înmulţirea matricelor?

Problema 3.

Considerăm o funcţie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continuă, descrescătoare, astfel încât $f(\pi) = 0$ şi fie F o primitivă a sa. Demonstraţi că

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos x \, \mathrm{d}x \leq 0.$$

Problema 4.

Spunem că un grup finit $(\mathrm{G}, \cdot)$ cu n elemente este *bun* dacă îndeplineşte condiţiile: (i) n nu este divizibil cu 4 şi (ii) există două elemente distincte a şi b ale lui G, diferite de elementul neutru e al grupului, astfel încât $a^2 = b^2 = e$.

a) Daţi un exemplu de grup bun.

b) Dacă există un grup bun cu n elemente, arătaţi că $n = 4k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că un grup bun nu poate fi abelian.

Gazeta Matematică 11/2015 (Supliment)

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2016
Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A XII-A

Problema 1.

Calculați $\int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt[3]{x}} + e^{\sqrt[4]{x}}\right) \mathrm{d}x$.

Soluție și barem

Notăm $I_n = \int_0^1 e^{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*$ (facem convenția $\sqrt[1]{x} = x$). Cu schimbarea de variabilă $t = e^{\sqrt[n]{x}}$ obținem că $I_n = \int_1^e n \ln^{n-1} t\,\mathrm{d}t$. **(2p)**

Integrând prin părți, deducem că $I_n = n\left(t \ln^{n-1} t\Big|_1^e - \int_1^e t(n-1)\ln^{n-2} t \cdot \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right) = n\left(e - I_{n-1}\right), \forall n \geq 2$.

În plus, $I_1 = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - 1$. **(3p)**

Folosind relația găsită, $I_2 + I_3 + I_4 = 4e + I_2 - 3I_3 = -5e + 10I_2 = 15e - 20I_1 = 5(4-e)$. **(2p)**

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathrm{M} = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = \det(A + X) = 0\right\}$.

a) Determinați două mulțimi K și L, părți stabile ale monoidului $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot\right)$, astfel încât $\mathrm{K} \cup \mathrm{L} = \mathrm{M}$.

b) Este M stabilă în raport cu înmulțirea matricelor?

Soluție și barem

a) Condiția $\det X = 0$ arată că o matrice din M are forma $X = \begin{pmatrix} ax & x \\ ay & y \end{pmatrix}$, unde $a, x, y \in \mathbb{R}$.

Atunci $\det(A + X) = (ax+6)(y+1) - (ay+3)(x+2) = (a-3)(x-2y)$ și, din $\det(A+X) = 0$, deducem că $a = 3$ sau $x = 2y$. **(3p)**

Mulțimile $\mathrm{K} = \left\{\begin{pmatrix} 3x & x \\ 3y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ și $\mathrm{L} = \left\{\begin{pmatrix} 2ay & 2y \\ ay & y \end{pmatrix} \mid a, y \in \mathbb{R}\right\}$ îndeplinesc cerințele problemei. **(2p)**

b) M nu este stabilă în raport cu înmulțirea matricelor: de exemplu, $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{K} \subset \mathrm{M}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{L} \subset \mathrm{M}$, însă $XY = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 28 & 14 \end{pmatrix} \notin \mathrm{M}$. **(2p)**

Problema 3.

Considerăm o funcție $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ continuă, descrescătoare, astfel încât $f(\pi)=0$ și fie F o primitivă a sa. Demonstrați că

$$\int_0^{2\pi} F(x)\cos x\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Soluție și barem

Observăm că $I=\int_0^{2\pi} F(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} F(x)(\sin x)'\,\mathrm{d}x=F(x)\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=$ $=-\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$. **(3p)**

Dacă $x\in[0,\pi]$, atunci $f(x)\ge f(\pi)=0$, iar dacă $x\in[\pi,2\pi]$, atunci $f(x)\le f(\pi)=0$. **(2p)**

Rezultă că $I=-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\le 0$, unde am ținut seama de semnul comun al funcțiilor f și sin pe fiecare dintre intervalele $[0,\pi]$ și $[\pi,2\pi]$. **(2p)**

Problema 4.

Spunem că un grup finit $(\mathrm{G},\cdot)$ cu n elemente este *bun* dacă îndeplinește condițiile: (i) n nu este divizibil cu 4 și (ii) există două elemente distincte a și b ale lui G, diferite de elementul neutru e al grupului, astfel încât $a^2=b^2=e$.

a) Dați un exemplu de grup bun.

b) Dacă există un grup bun cu n elemente, arătați că $n=4k+2$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că un grup bun nu poate fi abelian.

Gazeta Matematică 11/2015 (Supliment)

Soluție și barem

a) De exemplu, grupul $(S_3,\cdot)$ al permutărilor de ordin 3 este grup bun: $|S_3|=6\not\vdots\, 4$, iar transpozițiile (în număr de trei) sunt elemente de ordin 2 ale acestui grup. **(2p)**

b) Cum G conține elemente de ordin 2, din teorema lui Lagrange rezultă că G este de ordin par. Pe de altă parte, n nu este divizibil cu 4 și atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n=4k+2$. **(1p)**

c) Dacă, prin absurd, $ab=ba$, ar rezulta că $\mathrm{H}=\{e,a,b,ab\}$ este subgrup al lui G. **(3p)**

Cum H este subgrup de ordin 4 al lui G, este contrazisă teorema lui Lagrange. **(1p)**

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se vor puncta corespunzător.