



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuațiile:

a) $\frac{1}{2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} + 6} - \frac{1}{2^{2x} - 2^{x+2} + 3} = \frac{3}{2^x}$;

b) $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{4x+5} + \sqrt[3]{5x-3} = \sqrt[3]{11x+3}$.

2. Fie $a, b, c > 1$, astfel încât $abc = 8$. Demonstrați că

$$\log_{ab}(a+b) + \log_{bc}(b+c) + \log_{ca}(c+a) \geq 3.$$

3. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și $M \in \mathcal{C}(O, R)$. Arătați:

$$nR \leq MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \leq 2nR.$$

4. a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$f(f(x)) + 2014 \cdot f(x) = x^{2015}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrați că f este injectivă.

b) Există funcții $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, injective, astfel încât

$$f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2015, \quad \forall x \in (1, \infty)?$$

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).

Timp de lucru: 3 ore

Soluții clasa a X-a:

1. a) Notăm $2^x = t > 0$ și ecuația devine: $\frac{t}{2 \cdot t^2 - 6t + 6} - \frac{t}{t^2 - 4t + 3} = 3$

adică $\frac{1}{2(t+\frac{3}{t})-6} - \frac{1}{(t+\frac{3}{t})-4} = 3$.

Cu notația $t + \frac{3}{t} = u$ se obține $\frac{1}{2u-6} - \frac{1}{u-4} = 3$, echivalentă cu ecuația

$$6u^2 - 41u + 70 = 0, \text{ cu soluțiile } u_1 = \frac{7}{2} \text{ și } u_2 = \frac{10}{3}.$$

Făcând calculele obținem $t_1 = 2$ și $t_2 = \frac{3}{2}$, de unde $x = 1$ sau

$$x = \log_2 3 - 1.$$

b) Notație:

$$2x + 1 = a, \quad 4x + 5 = b, \quad 5x - 3 = c;$$

$$a + b + c = (2x + 1) + (4x + 5) + (5x - 3) = 11x + 3$$

Prin ridicarea la cub se obține:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

$$\Rightarrow 3(a + b)(a + c)(b + c) = 0 \Rightarrow$$

$$a + b = 0 \quad x = -1;$$

$$a + c = 0 \quad x = \frac{2}{7};$$

$$b + c = 0 \quad x = -\frac{2}{9}.$$

2. Cum $(a+b)^2 \geq 4ab$ și $ab > 1$, obținem că $\log_{ab}(a+b)^2 \geq \log_{ab}(4ab)$ sau echivalent

$$2\log_{ab}(a+b) \geq 2\log_{ab} 2 + 1, \text{ de unde obținem } \log_{ab}(a+b) \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Analog } \log_{bc}(b+c) \geq \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{2} \text{ și } \log_{ca}(c+a) \geq \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{1}{2}.$$

Prin adunarea celor trei inegalități obținem:

$$\log_{ab}(a+b) + \log_{bc}(b+c) + \log_{ca}(c+a) \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} \geq$$

$$\geq \frac{(1+1+1)^2}{\log_2 a + \log_2 b + \log_2 b + \log_2 c + \log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2\log_2 abc} + \frac{3}{2} = 3.$$

Egalitatea are loc pentru $a = b = c = 2$.

3. Fie xOy un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul O al cercului $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât $A_1 \in Ox$. Se notează cu

z, z_1, z_2, \dots, z_n afixele punctelor M, A_1, A_2, \dots, A_n . Deoarece

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}(O, R)$, z_1, z_2, \dots, z_n sunt rădăcinile ecuației

$$z^n = R^n \Rightarrow z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 (*).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n MA_k &= \sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z - z_k}{z_k} \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{z_k \cdot \overline{z_k}} - 1 \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| = \sum_{k=1}^n R \cdot \left| \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right| \geq \\ &\geq R \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right) \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \sum_{k=1}^n \overline{z_k} - n \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \cdot \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} - n \right| = R \left| \frac{z}{R^2} \cdot 0 - n \right| = nR \quad (1). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z| + \sum_{k=1}^n |z_k| = nR + nR = 2nR \quad (2).$$

Concluzia problemei se deduce din relațiile (1), (2).

4. a) Dacă

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1^{2015} - 2014 \cdot f(x_1) = x_2^{2015} - 2014 \cdot f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{2015} = x_2^{2015} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ injectivă.}$$

$$\text{b) Din: } x = 2 \Rightarrow f(2) + f(4) + f(1) = 2015 (*);$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) + f(16) + f(2) = 2015 (**).$$

Scăzând cele două relații se obține: $f(1) = f(16) \Rightarrow f$ neinjectivă.

Barem de corectare

Clasa a X-a

Problema 1	Oficiu 1 p
a) $\frac{t}{2 \cdot t^2 - 6t + 6} - \frac{t}{t^2 - 4t + 3} = 3$	2p
$\frac{1}{2(t + \frac{3}{t}) - 6} - \frac{1}{(t + \frac{3}{t}) - 4} = 3$	1p
$6u^2 - 41u + 70 = 0$	1p
Finalizare	1p
b)	
$a + b + c = (2x + 1) + (4x + 5) + (5x - 3) = 11x + 3$	1p
Ridicarea la cub	2p
Finalizare	1p
TOTAL	10p

Problema 2	Oficiu 1 p
$(a + b)^2 \geq 4ab$	1 p
$\log_{ab}(a + b)^2 \geq \log_{ab}(4ab)$	1 p
$\log_{ab}(a + b) \geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{2}$	3p
$\log_{ab}(a + b) + \log_{bc}(b + c) + \log_{ca}(c + a) \geq$	
$\geq \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} + \frac{1}{\log_2 b + \log_2 c} + \frac{1}{\log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} \geq$	2p
$\geq \frac{(1+1+1)^2}{\log_2 a + \log_2 b + \log_2 b + \log_2 c + \log_2 c + \log_2 a} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2\log_2 abc} + \frac{3}{2} = 3.$	2p
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu 1p
z, z_1, z_2, \dots, z_n afixele punctelor M, A_1, A_2, \dots, A_n	1p
$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}(O, R)$, z_1, z_2, \dots, z_n sunt rădăcinile ecuației	2p
$z^n = R^n \Rightarrow z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 (*)$	
$\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n z - z_k = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z - z_k}{z_k} \right = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{z_k \cdot \overline{z_k}} - 1 \right = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right = \sum_{k=1}^n R \cdot \left \frac{z \cdot \overline{z_k}}{R^2} - 1 \right $	2p
$\sum_{k=1}^n MA_k \geq nR$	2p
$\sum_{k=1}^n MA_k \leq 2nR$	1p
Finalizare	1p
TOTAL	10p

Problema 4	Oficiu 1 p
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$	2p
$x_1^{2015} - 2014 \cdot f(x_1) = x_2^{2015} - 2014 \cdot f(x_2)$	2p
$x_1^{2015} = x_2^{2015} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injectivă	2p
$x = 2 \Rightarrow f(2) + f(4) + f(1) = 2015$	1p
$x = 4 \Rightarrow f(4) + f(16) + f(2) = 2015$	1p
$f(1) = f(16) \Rightarrow f$ neinjectivă	1p
TOTAL	10p