MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2015. február 28.

XI. OSZTÁLY

1.) Adott az $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. Mutasd ki, hogy létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lambda(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$, majd számítsd ki az $S = \sum_{k=0}^{2015} A^k$ összeget!

2.) Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = 0$, $a_n = 3a_{n+1} + 4$ és legyen $b_n = a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Számítsd ki a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) b_n$ határértéket!

3.) Számítsd ki az $L = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to 0} (1 + \sin x + 2\sin 2x + ... + n\sin nx)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{n^3}}$ határértéket!

4.) Adott a következő számsorozat: $a_1 = a, a_2 = b,\ a, b \in (0, \infty)$ és a_1, a_2, a_3 számtani haladványt alkot, a_2, a_3, a_4 mértani haladványt alkot, a_3, a_4, a_5 számtani haladványt alkot, a_4, a_5, a_6 mértani haladványt alkot, és így tovább.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Számítsd ki *a* és *b* értékét, amelyre $\lim_{n\to\infty} \left(a_{2n} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n \right) = \frac{4}{3}$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A XI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\lambda(I_2+A)(I_2-A)=I_2 \Rightarrow \lambda\left(I_2-A^2\right)=I_2$ și cum $A^2=-I_2$ rezultă $\lambda=\frac{1}{2}$	**2p**
	Din $A^2=-I_2$ obținem $A^3=-A$ și $A^4=I_2$	**1p**
	Avem $A^{4k}=I_2;\ A^{4k+1}=A;\ A^{4k+2}=-I_2$ și $A^{4k+3}=-A$	**2p**
	Cum $A^0+A^1+A^2+A^3=I_2+A+(-I_2)+(-A)=O_2$ avem	**2p**
	$S=\sum\limits_{k=0}^{2015}A^k=\underbrace{A^0+A^1+A^2+A^3}_{=O_2}+\ldots+\underbrace{A^{2012}+A^{2013}+A^{2014}+A^{2015}}_{=O_2}=O_2$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	$a_n=3a_{n+1}+4 \Rightarrow a_n+2=3a_{n+1}+6 \Rightarrow a_n+2=3\left(a_{n+1}+2\right)$ (1)	**2p**
	$b_n=a_n+2 \overset{(1)}{\Rightarrow} b_n=3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ de unde rezultă că șirul $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică cu primul termen $b_1=2$ și rația $q=\frac{1}{3}$, deci $b_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{3^{n-1}}$	**2p**
	Cum $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum\limits_{k=1}^{n}k-n=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$	**1p**
	Avem $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)b_n=n^2\cdot\frac{2}{3^{n-1}}=\frac{2n^2}{3^{n-1}}$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3^{n-1}}$	**1p**
	Pentru calculul limitei aplicăm de două ori teorema lui Stolz-Cesaro (șirul cu termenul general $x_n=3^{n-1}, n\geq 1$ fiind strict crescător) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2-2n^2}{3^n-3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n+1)}{3^n-3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=0$	**3p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx)^{\frac{1}{x}}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx)^{\frac{1}{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}}\right]^{\frac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{x}}$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{2^2\sin 2x}{2x}+\ldots+\frac{n^2\sin nx}{nx}\right)}=e^{1+2^2+\ldots+n^2}=e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$	**4p**
	$L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right)^{\frac{1}{n^3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}}=e^{\frac{1}{3}}$	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a_1, a_2, a_3 progresie aritmetică $\Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 = 2b - a$ a_2, a_3, a_4 progresie geometrică $\Rightarrow a_4 = \frac{a_3^2}{a_2} = \frac{(2b-a)^2}{b}$	**1p**
	a_3, a_4, a_5 progresie aritmetică $\Rightarrow a_5 = 2a_4 - a_3 = \frac{(2b-a)(3b-2a)}{b}$	**1p**
	a_4, a_5, a_6 progresie geometrică $\Rightarrow a_6 = \frac{a_5^2}{a_4} = \frac{(3b-2a)^2}{b}$	**1p**
	Presupunem, că $a_{2k-1} = \frac{[(k-1)b-(k-2)a][kb-(k-1)a]}{b}$ şi $a_{2k} = \frac{[kb-(k-1)a]^2}{b}$, trebuie să demonstrăm că $a_{2k+1} = \frac{[kb-(k-1)a][(k+1)b-ka]}{b}$ şi $a_{2k+2} = \frac{[(k+1)b-ka]^2}{b}$	**1p**
	$a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ progresie aritmetică $\Rightarrow$ $a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2\frac{[kb-(k-1)a]^2}{b} - \frac{[(k-1)b-(k-2)a][kb-(k-1)a]}{b}$ $= \frac{[kb-(k-1)a][(k+1)b-ka]}{b}$, $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ progresie geotmetrică $\Rightarrow$ $a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{\left\{\frac{[kb-(k-1)a][(k+1)b-ka]}{b}\right\}^2}{\frac{[kb-(k-1)a]^2}{b}} = \frac{[(k+1)b-ka]^2}{b}$.	**1p**
	Deci formula termenului general este $a_{2k-1} = \frac{[(k-1)b-(k-2)a][kb-(k-1)a]}{b}$ şi $a_{2k} = \frac{[kb-(k-1)a]^2}{b}$, pentru $\forall k \in N^*$	**1p**
	$\lim_{n\to\infty}\left(a_{2n} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2 n^2 - 2(a^2-ab)n + a^2}{b} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{[3(b-a)^2 - b]n^2 - (6a^2 - 6ab + 4b)n + 3a^2}{3b} = \frac{4}{3}$	**1p**
	Rezultă că $\begin{cases} 3(b-a)^2 - b = 0 \\ 3a^2 - 3ab + 2b = 0 \\ \frac{a^2}{b} = \frac{4}{3} \end{cases}$	**1p**
	Scăzând ecuaţia a doua din prima rezultă că $b(b-a-1) = 0$. Deorece $a, b \in (0, \infty)$, avem $b = a+1$. Înlocuin în ecuaţia a treia obţinem $3a^2 - 4a - 4 = 0$ cu soluţiile 2 şi $-\frac{2}{3}$, dintre care convine $a = 2$ şi astfel $b = 3$.	**1p**