Olimpiada de matematică

Etapa locală

7 februarie 2004

Clasa a IX-a

(7p) **1**. Să se demonstreze că dacă a, b, c $\in(0,\infty)$ astfel încât abc=1, atunci este adevărată inegalitatea: $a^4+b^4+c^4\geq a+b+c$. Când are loc egalitatea?

Problemă propusă de prof. Mihaela OLARU, Liceul Teoretic „Dunărea”, Galaţi

(7p) **2**. În patrulaterul convex ABCD se iau punctele $M\in(BC)$, $N\in(CD)$ astfel încât: $\dfrac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{BM}}=3;\ \dfrac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}}=2$

Dreptele AM şi BN se intersectează în punctul P. Se cere:

a) să se exprime vectorii $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$;

b) dacă patrulaterul ABCD este paralelogram, să se calculeze $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PM}}\ si\ \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PN}}$.

Problemă propusă de prof. Constantin URSU, C.N.V.A. Galaţi

(7p) **3**. Pentru orice $n\in N^*$ se defineşte $n!=1\cdot2\cdot3\ldots\cdot n$ şi se notează cu

$a_n=\dfrac{(2n+1)!+\dfrac{(4n+2)!}{(2n+1)!}}{4n+3}$. Determinaţi valorile lui $n\in N^*$ pentru care $a_n\in N$

Problemă propusă de prof. Petre BĂTRÂNEŢU, Şcoala 26, Galaţi

(7p) **4**. Demonstraţi că: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2002}-\dfrac{1}{2003}\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3})$.

Problemă propusă de prof. Petre BĂTRÂNEŢU, Şcoala 26, Galaţi

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore