OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a V-a

SUBIECTUL I
Se dă șirul de numerele: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19......... .
a) Stabiliți dacă termenul al 22-lea din şir este pătrat perfect.
b) Aflați termenul al 2015-lea al șirului.

SUBIECTUL II
Calculați suma numerelor naturale, cuprinse între 400 si 600, care împărțite la 12 dau restul 10.

SUBIECTUL III
Fie m un număr natural nenul. Se consideră mulțimile:
$A=\{ x \in N / x=2^n -1, n \in N^*, n \leq m \}$ și $B=\{ y \in N / y=2^{n-1}, n \in N^*, n \leq m \}$.
a) Stabiliți de ce mulțimea $A \cap B$ nu poate avea mai mult de un element.
b) Determinați numărul m știind că mulțimea $A \cup B$ conține doar numere consecutive.
c) Determinați valoarea minimă a numărului m astfel încât propoziția “$1023 \in A$ “ să fie adevărată.
d) Care este valoarea maximă a numărului m dacă mulțimea B conține exact 8 pătrate perfecte?

SUBIECTUL IV
Fie numărul natural $n = \overline{11\ldots1} + \overline{22\ldots2} + \ldots + \overline{88\ldots8} + \overline{99\ldots9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa\ldots a}$ conţinând câte 2015 cifre de a. Determinaţi câte cifre de 9 conţine numărul n .

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a V-a
Soluţii şi barem de corectare

SUBIECTUL I
a) Dacă se stabileşte că termenul general are forma $T_n = 3(n-1) + 1$,

atunci $T_{22} = 3(22-1) + 1 = 64$ care este pătrat perfect. .... 4p.

Dacă nu se foloseşte termenul general şi se face efectiv enumerarea, se poate găsi al 22-lea termen şi se acordă cele 4 p.

b) $T_{2015} = 3(2015-1) + 1 = 6043$ 3p

Barem: a) 4p
b) 3p

SUBIECTUL II
x : 12= a, rest 10; deci x= 12a + 10. .... 1p

Deoarece numerele sunt cuprinse între 400 şi 600, apar astfel:

$12 \cdot 33 + 10 = 406$

$12 \cdot 34 + 10$

$12 \cdot 35 + 10$

.

.

.

$12 \cdot 49 + 10 = 598$. 2p

- justificarea că sunt 17 numere 1p

Adunând relaţiile, obţinem $12(33+34+35+\ldots+49) + 10 \cdot 17$ 1p

$12(S_{49} - S_{32}) + 170 = 8534$ 2p

Barem: 7p

SUBIECTUL III
A={ 1,3,7,15,31,63,........} si B={1,2,4,8,16,32,..........}

a) cu excepţia lui 1, B conţine doar numere pare, iar A conţine doar numere impare. Singurul element comun poate fi 1. .... 1p
Observaţie :Dacă elevul nu explică complet ci doar scrie că pentru m=1 $\Rightarrow$n=1$\Rightarrow$ $A \cap B = \{1\}$ atunci se acordă 0,5 p.
b) Dacă m=2 $\Rightarrow$ n$\in$ {1,2} $\Rightarrow$ A={1,3} si B={1,2}, atunci AUB={1,2,3}, singura care are numere consecutive 2p

c) 1023 $\in$A, deci 2^n -1=1023, n=10 deci m=10. .... 2p

d) y=2^{n-1} este p.p. dacă n-1 este par.
Primele 8 p.p. se obțin pentru primii 8 exponenți pari, adică
n-1$\in$\{0,2,4,6,8,10,12,14\}, n$\in$\{1,3,5,7,9,11,13,15\}
Valoarea maximă a lui m este16. ....2p
Observație: Dacă un elev consideră m=15 în loc de m=16 atunci se acordă ….1,75p

Barem: a) 1p
b) 2p
c) 2p
d) 2p

SUBIECTUL IV

Are loc $n=\overline{11\ldots1}+\overline{22\ldots2}+\ldots+\overline{88\ldots8}+\overline{99\ldots9}=(1+2+\ldots+8+9)\cdot\overline{11\ldots1}$ ……….1 punct .

$1+2+\ldots+8+9=45$ ………..2 puncte .

Obţinem $n=45\cdot\overline{11\ldots1}$, ………..2 puncte .

relaţie ce ne conduce la $n=\overline{499\ldots95}$, număr ce are 2016 cifre ………...1 puncte .

Finalizare, n conţine 2014 cifre de 9 …………1 punct .

Barem: 7p