MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a VIII-a

**SUBIECTUL I**

Fie $a,b,c$ numere reale pozitive cu proprietatea că $a\cdot b\cdot c=1$.

***a)*** Verificați egalitatea $\dfrac{1}{1+a^2b}+\dfrac{1}{1+bc^2}=1$;

***b)*** Demonstraţi că $\dfrac{1}{1+a^2b}+\dfrac{1}{1+b^2c}+\dfrac{1}{1+c^2a}<2$.

Vasile Berghea, Avrig, Sibiu, G.M.

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

***a)*** $abc=1\Rightarrow \dfrac{1}{1+a^2b}+\dfrac{1}{1+bc^2}=\dfrac{1}{abc+a^2b}+\dfrac{1}{abc+bc^2}$ ........$1p$

$\dfrac{1}{abc+a^2b}+\dfrac{1}{abc+bc^2}=\dfrac{a+c}{abc(a+c)}=\dfrac{1}{abc}=1$ ........$1p$

***b)*** Arată că $\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}>\dfrac{1}{1+bc}$ ........$1p$

$\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}>\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+bc}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{a}{1+a}=1$ ........$1p$

Numerele $ab,bc,ca$ respectă condițiile $\Rightarrow \dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ca}>1$ ........$1p$

$\dfrac{1}{1+ab}=\dfrac{abc}{abc+ab}=\dfrac{c}{1+c}=1-\dfrac{1}{1+c}$ .......$0,5p$

Analog $\dfrac{1}{1+bc}=1-\dfrac{1}{1+a}$ și $\dfrac{1}{1+ca}=1-\dfrac{1}{1+b}$ .......$0,5p$

Deci $1<\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}<2$ ........$0,5p$

Numerele $a^2b,b^2c,c^2a$ respectă condițiile $\Rightarrow \dfrac{1}{1+a^2b}+\dfrac{1}{1+b^2c}+\dfrac{1}{1+c^2a}<2$ ........$0,5p$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a VIII-a

**SUBIECTUL al II-lea**

***a)*** Aflați numerele reale $x$ și $y$ pentru care avem $\sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}\le 10$.

***b)*** Arătați că nu există $m,n\in\mathbb{N}$, astfel încât $7m^2-n^2=6n+3$.

Constantinescu Dragoş Jr., Râmnicu Vâlcea

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

***a)*** $\sqrt{2x^2+12x+67}=\sqrt{2(x+3)^2+49}\ge 7$ ........1$p$

$\sqrt{y^2-6y+18}=\sqrt{(y-3)^2+9}\ge 3$ ........1$p$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}\le 10\\ \sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}\ge 10\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{2x^2+12x+67}+\sqrt{y^2-6y+18}=10$$ ........1$p$

$x=-3$ $si$ $y=3$ ........1$p$

***b)***

$$\left.\begin{array}{l}7m^2=(n^2+6n+9)-6\Leftrightarrow 7m^2+6=(n+3)^2\Rightarrow 7\cdot(m^2+1)=(n+3)^2+1\\ Cum\ 7\cdot(m^2+1)\vdots 7\end{array}\right|\Rightarrow (n+3)^2+1\vdots 7.$$

........1$p$

Arătăm că $p^2+1\not\vdots\, 7,(\forall)p\in\mathbb{N}$.

Cum

$p\in\{7k,7k+1,7k+2,7k+3,7k+4,7k+5,7k+6\}\Rightarrow p^2\in\{7k,7k+1,7k+2,7k+4\}\Rightarrow$
$p^2+1\in\{7k+1,7k+2,7k+3,7k+5\}\Rightarrow p^2+1\not\vdots\, 7\Rightarrow(\nexists)m,n\in\mathbb{N}$ care să verifice relația dată . ........2$p$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a VIII-a

**SUBIECTUL al III-lea**

În triunghiul $ABC$ cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $BC=5\sqrt{6}\,cm$ şi $tg\,B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $[CD]$ este mediană cu $D\in(AB)$, iar $AN\perp CD$, cu $N\in(CD)$. Fie $AN\cap BC=\{O\}$.

***a)*** Aflaţi aria triunghiul $ABC$.

***b)*** Demonstraţi că $[BO]\equiv[CO]$.

***c)*** Dacă $MA\perp(ABC)$ şi $m\sphericalangle[(MCD),(ABC)]=30^\circ$, să se afle $MA$.

Leon Genoiu, Râmnicu Vâlcea

**BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

***a)*** Cum $\text{tg}\,(\angle B)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AC=k\sqrt{2}$,
iar AB=2k. Cum BC=$5\sqrt{6}$ cm, ........1$p$

Aplicând T.P. în ΔABC şi rezolvând ecuaţia obţinută, aflăm k=5. Atunci AB=10cm, iar AC=5$\sqrt{2}$ cm şi atunci $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=25\sqrt{2}cm^2$. ........1$p$

***b)*** Din ΔACD, dr. în A, cu T.P.,aflăm CD=5$\sqrt{3}$ cm.Tot din ΔACD, cum AN$\perp$CD$\Rightarrow$
AN=$\dfrac{AC\cdot AD}{CD}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$cm

Din ΔNAC, dr. în N, cu T.P. aflăm CN=$\dfrac{10\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot 5\sqrt{3}=\dfrac{2}{3}\cdot CD$. ........1$p$

Cum [CD] mediană,deducem că N este centrul de greutate al triunghiului ABC şi cum AN$\cap BC=\{O\}$,deducem că [BO]$\equiv[OC]$. ........1$p$

***c)*** Cum MA$\perp$(ABC), AN$\perp$CD,CD,AN$\subset$(ABC), cu T.3P.
deducem că MN$\perp$CD. Atunci deducem că ........1$p$

m($\angle$MNA)= m($\angle[(MCD);(ABC)])=30^0$ .........1$p$

Cum AN=$\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$cm, din ΔMAN, dr. în A şi m($\angle$MNA)=30$^0$,aflăm
că MA=$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$cm. ........1$p$

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ15.02.2014
CLASA a VIII-a

**SUBIECTUL al IV-lea**

Pe planul triunghiului echilateral $ABC$ cu $AB = 6\,cm$ se ridică, de aceeași parte a planului $(ABC)$, perpendicularele $A'A \perp (ABC)$, $B'B \perp (ABC)$ și $C'C \perp (ABC)$, astefel încât $AA' = BB' = 6\sqrt{3}\,cm$.

***a)*** Aflaţi distanţa de la $A$ la planul $(A'BC)$.

***b)*** Aflaţi sinusul unghiului dintre $A'B$ și $B'C$.

***c)*** Se colorează cu roșu sau albastru segmentele cu extremitățile în oricare două puncte dintre punctele $A, B, C, A', B', C'$. Dintre toate triunghiurile cu vârfurile în trei din cele șase puncte, arătați că există cel puțin un triunghi cu toate laturile de aceeași culoare.

Ștefan Smărăndoiu, Râmnicu Vâlcea

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

***a)*** $\left.\begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ Fie\ AM \perp BC \\ AM \subset (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow A'M \perp BC \Rightarrow d(A', BC) = A'M$ ........$1p$

$\left.\begin{array}{l} Fie\ \ AT \perp A'M \\ AM \perp BC \\ A'M \perp BC \\ BC \subset (A'BC) \\ A'M \subset (A'BC) \end{array}\right\} \Rightarrow A'T \perp (A'BC)$ ........$1p$

$A'T = \dfrac{6\sqrt{15}}{5}\,cm$ ........$1p$

***b)*** Prelungim $[AB]$ $cu$ $[BE], a.i.$ $[AB] \equiv [BE]$; $EBA'B'$ paralelogram

$\Rightarrow EB' \parallel A'B \Rightarrow \sphericalangle(A'B, B'C) = \sphericalangle(EB', B'C) = \sphericalangle EB'C$ ........$1p$

$A_{\triangle B'EC} = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{13}}{2} = 9\sqrt{39}$; $A_{\triangle B'EC} = \dfrac{12 \cdot 12 \sin EB'C}{2}$; $\sin EB'C = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$ ....$1p$

***c)*** Există 5 segmente cu o extremitate în $B: [BA], [BC], [BB'], [BA'], [BC']$.

Conform principiului cutiei există trei segmente de aceeași culoare. ........$1p$

Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că $[BB'], [BA'], [BC']$ sunt roșii.

$*$ Dacă una din muchiile $[A'B'], [A'C'], [B'C']$ este roșie, atunci avem un triunghi roșu.

$*$ Dacă toate muchiile $[A'B'], [A'C'], [B'C']$ sunt albastre, atunci $\triangle A'B'C'$ este albastru. Există deci, cel puțin un triunghi cu toate laturile de aceeași culoare. ....$1p$