OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 17 februarie 2024

CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$x_1=a,\ y_1=b,\ x_{n+1}=\frac{4x_n+7y_n}{11}\ \text{ și }\ y_{n+1}=\frac{7x_n+4y_n}{11},\ \text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

Arătați că cele două șiruri sunt convergente, au aceeași limită și determinați această limită.

2. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consider matricele $A(x)=\begin{pmatrix}5x+1 & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) (3p) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) (4p) Determinați numărul natural n știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2023)\cdot A(2024)=A(n)$.

3. (7p) Se consideră $m,n,p\in\mathbb{N}^*$ și funcțiile $f,g:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^m+2}{x^n+1}$, $g(x)=px-\sqrt{x^2-2x}$.

Determinați numerele m,n,p știind că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\mathrm{e}^{2024}$.

4. a) (3p) Se consideră matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x)=\det(A+xB)$. Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=\det(A)+a\cdot x+b\cdot x^2+\det(B)\cdot x^3$.

b) (4p) Fie $\omega\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3=-1$. Dacă matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $\det(A+\omega B)=0$, arătați că $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.