1. a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc, \forall a,b,c \in R, "=" \Leftrightarrow a=b=c$..1p

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ și împreună cu relația de mai sus obținem

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc), \forall a,b,c \in R, "=" \Leftrightarrow a=b=c$..1p

$(a+b+c)^2 \geq 3\cdot 671 \Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c)^2} \geq \sqrt{2013} \Leftrightarrow |a+b+c| \geq \sqrt{2013} \Leftrightarrow a+b+c \geq \sqrt{2013}$ ……

………………………………………………………………………………1p

$$"=" \Leftrightarrow \begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a=b=c \\ a^2+a^2+a^2=671 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{2013}}{3}$$ 1p

b)

$$\sqrt{671-ab} = \sqrt{ac+bc} = \sqrt{c(a+b)} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

$$\sqrt{671-ac} = \sqrt{ab+bc} = \sqrt{b(a+c)} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

$$\sqrt{671-bc} = \sqrt{ab+ac} = \sqrt{a(b+c)} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

……………………………………………………………………………………1p

Adunând membru cu membru relațiile de mai sus obținem:

$$\sqrt{671-ab} + \sqrt{671-ac} + \sqrt{671-bc} \leq \frac{3}{2}(a+b+c)$$ 1p

$$"=" \Leftrightarrow \begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a=b+c \\ b=a+c \\ c=a+b \\ ab+ac+bc=671 \end{cases}$$

Sistemul nu are soluție rezultă că “=” nu are loc și deci avem

$$\sqrt{671-ab} + \sqrt{671-ac} + \sqrt{671-bc} < \frac{3}{2}(a+b+c)$$ ……………………………………...1p

2.

Din relația $a_{2013} = 3102$ se obține că $a_1 + 2012r = 3102$. Se observă că rația nu poate fi decât $r=1$ …………………………………………………………………………2p

Rezultă că $a_1 = 3102 - 2012 = 1090$ și se obține că termenul general al progresiei este $a_n = n + 1089$ ……………………………………………………………………………1p

Fie m cu proprietatea că $a_m = \overline{m}$, se obține egalitatea $1089 + m = \overline{m}$

Se observă că m nu poate avea mai putin de 4 cifre, și nici mai mult de 5.

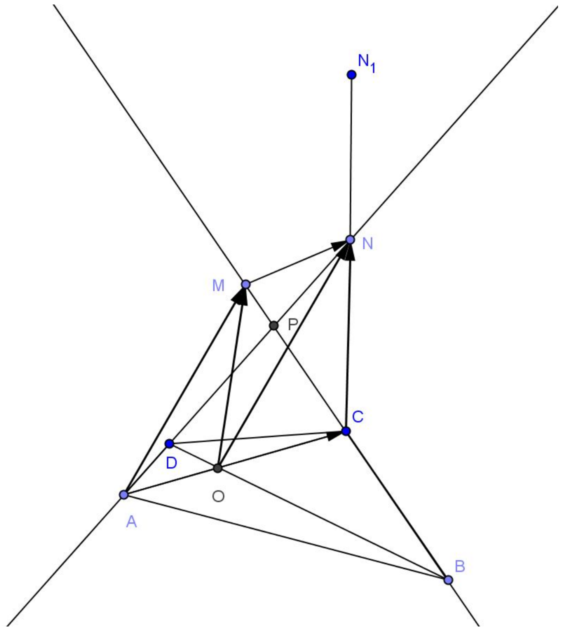
Luăm $m = \overline{abcd}$, $a \leq d$, și avem egalitatea $\overline{dcba} - \overline{abcd} = 1089$, de unde rezultă că $999(d-a) + 90(c-b) = 1089$ sau $111(d-a) + 10(c-b) = 121$ ………………………………2p

Ultima cifră a membrului stâng trebuie să fie 1, deci trebuie ca $d-a=1$, $c-b=1$ și se obțin numerele de forma $\overline{ab(b+1)(a+1)}$ cu $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ și $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Pentru $m = \overline{abcde}$ se obține egalitatea $\overline{edcba} - \overline{abcde} = 1089$ $\overline{dcba} - \overline{abcd} = 1089$, de unde rezultă că $9999(e-a) + 990(d-b) = 1089$ sau $101(e-a) + 10(d-b) = 11$. Rezultă că

$e-a=1$ și $b-d=9$, iar $c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Obținem că $d=0$, $b=9$. Numerele căutate sunt de forma $\overline{a9c0(a+1)}$ cu $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
.... 2p

3. a). Din relația dată se obține că
$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}$
și după reduceri $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



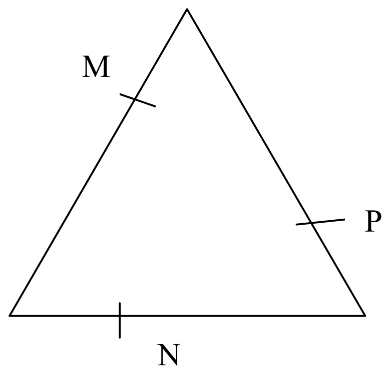
b). Evident [AN] este mediană în triunghiul ACN_1. Din asemănarea triunghiurilor PMN și PCA și din relația de la a) se obține că $AP=2PN$ și astfel că P este centrul de greutate al triunghiului ACN_1.

c). Avem că
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CN}=$
$=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN_1}=\overrightarrow{MN_1}$

deci punctele A, M, N_1 sunt coliniare.

4.
Va rezulta:

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$
$\overrightarrow{NB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$
$\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OA}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OB}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ }... .4 p

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OC}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$
de unde prin adunare obținem relația cerută ....3 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a IX-a

Subiecte:

1. Fie numerele reale a,b,c≥ 0 care verifică relația ab + ac + bc = 671
   a) Să se arate că a + b + c $\geq \sqrt{2013}$. În ce caz are loc egalitatea?
   b) Arătați că $\sqrt{671-ab}+\sqrt{671-ac}+\sqrt{671-bc}<\frac{3}{2}(a+b+c)$.

   Septimiu Voiculeț, Videle, Teleorman

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, $a_1 \in N^*$ rația $r \in N^*$, cu proprietatea că $a_{2013}=3102$. Determinați numerele naturale m cu proprietatea că $a_m=\overline{m}$, unde $\overline{m}$ este răsturnatul lui m.

   Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O punctul de intersecție a diagonalelor și punctele $M\in BC, N\in AD$ astfel încât $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{ON}$.
   a). Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
   b). Fie $\{P\}=AD\cap BC$ și N_1 simetricul lui C față de N. Demonstrați că P este centrul de greutate al triunghiului ACN_1.
   c) Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AN_1}$ sunt coliniari.

   Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

4. Fie ABC un triunghi și punctele M,N,P astfel încât $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$. Să se arate că pentru orice punct O din plan are loc relația: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.