

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2015. február 28.

VIII. OSZTÁLY

1.) a) Adott a következő halmaz: $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mutasd ki, hogy $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \in A$!

b) Legyen $A = \sqrt{2^{2014} + 2^{1008} + 1}$ és $B = \sqrt{2^{2016} - 2^{1010} + 2^{1009} + 1}$.

Mutasd ki, hogy A és B természetes számok és határozd meg, hány természetes szám van az $(A; B)$ intervallumban!

2.) Az a, b, c pozitív számokról tudjuk, hogy: $a^2b + a^2c + 2abc = 2a^3 + b^2c + bc^2$. Igazold, hogy az egyik közülük a másik kettő számtani vagy mértani középarányosa!

3.) Az ABC derékszögű háromszög befogói $AB = 2\sqrt{3}$ cm és $AC = 4$ cm. A háromszög síkjára, a sík ugyanazon oldalán, $AM = 2$ cm és $BN = 1$ cm hosszúságú merőlegeseket állítunk.

a) Ellenőrizd, hogy az NMC háromszög derékszögű-e?

b) Határozd meg az M pont távolságát az (ABC) és (MNC) síkok metszési egyenesétől!

4.) Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm és $AA' = 3\sqrt{2}$ cm. Számítsd ki:

a) az AD' és BC egyenesek szögének szinuszát!

b) a C pont távolságát az AD' egyenestől!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

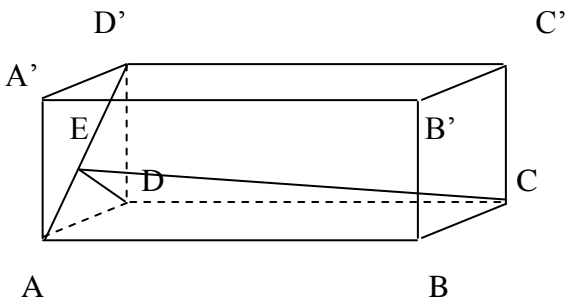
28 februarie 2015

BAREM

CLASA A VIII-A

1.)	Din oficiu	1p
a)	$\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$	2p
	$a = 2, b = 1$	1p
b)	$A = \sqrt{2^{2014} + 2^{1008} + 1} = \sqrt{(2^{1007})^2 + 2 \cdot 2^{1007} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(2^{1007} + 1)^2} = 2^{1007} + 1 \in \mathbb{N}$	2p
	$B = \sqrt{2^{2016} - 2^{1010} + 2^{1009} + 1} = \sqrt{(2^{1008})^2 - 2^{1009} \cdot (2-1) + 1} =$ $= \sqrt{(2^{1008})^2 - 2 \cdot 2^{1008} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(2^{1008} - 1)^2} = 2^{1008} - 1 \in \mathbb{N}$	2p
	Numărul numerelor naturale din intervalul $(A; B) = (2^{1007} + 1; 2^{1008} - 1)$ este $2^{1008} - 1 - (2^{1007} + 1) - 1 = 2^{1008} - 2^{1007} - 3 = 2^{1007} \cdot (2-1) - 3 = 2^{1007} - 3$	2p
2.)	Din oficiu	1p
	Egalitatea se scrie: $a^2b + a^2c + 2abc - 2a^3 - b^2c - bc^2 = 0$	1p
	$a^2(b+c) - 2a(a^2 - bc) - bc(b+c) = 0$	2p
	$(b+c)(a^2 - bc) - 2a(a^2 - bc) = 0$	2p
	$(a^2 - bc)(b+c - 2a) = 0$	1p
	$a^2 - bc = 0$ sau $b+c - 2a = 0$	1p
	$a^2 = bc$ sau $b+c = 2a$	1p
	Deci a este media geometrică sau media aritmetică a numerelor b și c .	1p
	3.)	Din oficiu
a)		1p
	Prin calcul direct se determină $BC = \sqrt{28}$ cm, $MC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm, $NC = \sqrt{29}$ cm și $MN = \sqrt{13}$ cm.	2p
	$\triangle MNC : \sqrt{13} < \sqrt{20} < \sqrt{29}, \sqrt{29}^2 \neq \sqrt{13}^2 + \sqrt{20}^2 \stackrel{recIP}{\Rightarrow}$ nu este dreptunghic	1p

b)	determinarea dreptei de intersecție: $MN \cap AB = \{D\}$, $(ABC) \cap (MNC) = DC$	2p
	$\left. \begin{array}{l} M \notin (ABC), DC \subset (ABC) \\ MA \perp (ABC) \\ AP \perp DC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{f3}\perp \\ \Rightarrow MP \perp DC \Rightarrow MP = d(M, DC) \end{array}$	1p
	$MA \perp AB, NB \perp AB \Rightarrow MA \parallel NB$ și $NB = \frac{MA}{2} \Rightarrow NB$ linie mijlocie în $\triangle MDA$. Deci $DB = BA = 2\sqrt{3}$ cm și $AD = 4\sqrt{3}$ cm.	1p
	$\triangle DAC : t.Pit. \Rightarrow DC = 8$ cm, înălțimea $AP = \frac{AD \cdot AC}{DC} \Rightarrow AP = 2\sqrt{3}$ cm $\triangle MAP : t.Pit. \Rightarrow MP = 4$ cm = $d(M, DC)$	1p

4.)	Din oficiu	1p
	Desen: 	1p
a)	$DA \parallel BC \Rightarrow m(\widehat{AD'}; BC) = m(\widehat{AD'}; AD) = m(\widehat{D'AD})$ $\sin \widehat{D'AD} = \frac{D'D}{AD'}$	2p
	$D'A^2 = D'D^2 + AD^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow D'A = 3\sqrt{3}$ Deci, $\sin \widehat{D'AD} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$	2p
b)	Fie $DE \perp AD', E \in AD'$ $CD \perp AD; CD \perp D'D; AD, D'D \subset (ADD'); AD \cap D'D = \{D\} \Rightarrow CD \perp (ADD')$ $CD \perp (ADD'), AD' \subset (ADD'), DE \perp AD' \Rightarrow CE \perp AD'$. Deci $d(C; AD') = CE$.	2p
	$DE \cdot AD' = DD' \cdot AD \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot DD'}{AD'} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ $CD \perp (ADD'), DE \subset (ADD') \Rightarrow CD \perp DE \Rightarrow CE^2 = CD^2 + DE^2 = 6^2 + \sqrt{6}^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow CE = \sqrt{42}$. Deci $d(C; AD') = \sqrt{42}$ cm.	2p