COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a VI-a

1. Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate (în grade) prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date.

2. Pe o dreaptă se iau, în această ordine, punctele $A_1, A_2, ..., A_{20}$, astfel încât $A_1A_2 = 6$ cm, $A_2A_3 = 12$ cm, $A_3A_4 = 18$ cm ș.a.m.d.

a) Ce lungime are segmentul $[A_1A_{20}]$? Dar segmentul $[A_{15}A_{20}]$?

b) Determinați $i \in \mathbb{N}^*$ pentru care $M \in [A_iA_{i+1}]$, unde M este mijlocul lui $[A_1A_{20}]$.

3. a) Fie p un număr prim mai mare decât 5. Determinați ultima cifră a lui p^4.

b) Aflați numerele prime p și q, știind că $p^4 + q^4 = 29186$.

4. a) Determinați numerele naturale a și b, dacă $[a, b] - (a, b) = 34$.

b) Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 1000\}$ ca reuniune de 500 de submulțimi disjuncte două câte două, astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi să fie pătrat perfect.

Subiect elaborat de prof. Valentina Blendea

SOLUTII

Clasa a VI-a

1. Pentru a avea un număr cât mai mic de unghiuri, trebuie ca măsurile acestora să fie cât mai mari. Putem lua cel mult două unghiuri de măsură 125° (şi vom lua chiar două!), cel mult patru unghiuri de măsură 25° (şi vom lua exact patru) şi, în final, încă două unghiuri cu măsura de 5°. Numărul minim de unghiuri în condițiile problemei este, deci, opt.

2. a) $A_1A_{20} = 6\cdot(1+2+...+19) = 1140$ cm, iar $A_{15}A_{20} = 6\cdot(15+16+...+19) = 510$ cm.

b) Conform punctului a), avem că $A_1M = 570$ cm; atunci

$$M \in [A_iA_{i+1}] \Leftrightarrow A_1A_i \le A_1M \le A_1A_{i+1} \Leftrightarrow 6\cdot\frac{(i-1)i}{2} \le 570 \le 6\cdot\frac{i(i+1)}{2},$$

iar acest lucru se întâmplă doar pentru $i = 14$.

3. a) Cum p se poate termina doar în 1, 3, 7 sau 9, p^2 se va termina în 1 sau în 9, deci p^4 va avea întotdeauna ultima cifră 1.

b) Dacă p şi q ar fi ambele mai mari decât 5, suma din membrul stâng ar avea ultima cifră 2, contradicție. Presupunând că p este numărul mai mic, el nu poate fi 2, din considerente de paritate, nici 3, din cauza ultimei cifre. Rămâne că $p = 5$ şi atunci $q^4 = 28561$, de unde $q = 13$.

4. a) Fie $d = (a,b)$; atunci $a = dx, b = dy$, cu $x, y \in \mathbb{N}, (x,y) = 1$, iar $[a,b] = dxy$. Evident, d trebuie să fie divizor al lui 34, adică $d \in \{1,2,17,34\}$. Considerând fiecare caz în parte, obținem soluțiile: $(a,b) \in \{(1,35),(5,7),(7,5),(35,1);(2,36),(4,18),(18,4),(36,2);(17,51),(51,17);(34,68),(68,34)\}$.

b) De exemplu, putem considera următoarea partiție a lui A:

$$\{1,224\},\{2,223\},...,\{112,113\},\{225,1000\},\{226,999\},...,\{612,613\}.$$