Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a V-a

Enunţuri

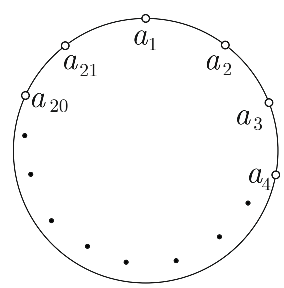
Problema 1. Două numere naturale x şi y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinaţi cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale a, b, c care au proprietatea că $a + b + c = abc$.

Problema 3. O mulţime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă oricare submulţime nevidă a sa are suma elementelor număr compus. Arătaţi că mulţimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, \ldots, 113! + 15\}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$. (Dacă n este număr natural nenul, notaţia $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

Problema 4. Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\\
S_2 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,\\
&\ldots\\
S_{17} &= a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},\\
S_{18} &= a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.
\end{aligned}$$



Arătaţi că cel puţin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5.

Timp de lucru 2 ore şi 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Problema 1.5 Două numere naturale x şi y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinaţi cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Soluţie Fracţia $\frac{x}{y}$ este subunitară, prin urmare $x < y$ sau $x = y - d$, unde d este un număr natural nenul. 1p

Relaţia dată se mai scrie $\frac{2011-1}{2011} < \frac{y-d}{y} < \frac{2012-1}{2012}$ sau $1 - \frac{1}{2011} < 1 - \frac{d}{y} < 1 - \frac{1}{2012}$, de unde $\frac{1}{2011} > \frac{d}{y} > \frac{1}{2012}$ sau $\frac{d}{2011d} > \frac{d}{y} > \frac{d}{2012d}$ (1)

Din (1) deducem $2011d < y < 2012d$ (2) 3p

Pentru $d = 1$ relaţia (2) este imposibilă.

Pentru $d = 2$ obţinem $4022 < y < 4024$, de unde $y = 4023$. Obţinem $x = 4021$ şi $x + y = 8044$.

Pentru $d \geq 3$ avem $4021d \geq 12063$.

Avem $x + y = 2y - d$. Din $y > 2011d$ obţinem $2y - d > 4021d \geq 12063$.

Prin urmare valoarea minimă a sumei se obţine când $d = 2$ şi $x + y = 8044$. 4p

Problema 2.5 Determinaţi numerele naturale a, b, c cu proprietatea că $a + b + c = abc$.

Soluţie Observăm că dacă unul dintre numere este 0, atunci toate numerele sunt egale cu 0. ....1p

Dacă $abc \neq 0$,atunci relaţia se scrie $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 1$. Cum relaţia este simetrică în a, b, c putem presupune $a \leq b \leq c$ de unde $ab \leq ac \leq bc$.

Dacă $ab > 3$, atunci $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} < 1$. 2p

Dacă $ab = 2$, atunci $a = 1$ şi $b = 2$, de unde obţinem $\frac{1}{2c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ şi atunci $c = 3$.

Dacă $ab = 3$, atunci $a = 1$ şi $b = 3$, de unde obţinem $\frac{1}{3c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ şi atunci $c = 2$, care nu convine pentru că am presupus $b < c$. 4p

Problema 3.5 O mulţime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă oricare submulţime nevidă a sa are suma elementelor număr compus.

Arătaţi că mulţimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, ..., 113! + 15\}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$. (Dacă n este număr natural nenul, notaţia $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

Soluţie O submulţime nevidă a lui Y are suma elementelor egală cu $S = \mathcal{M}113! + s$, unde $2 \leq s \leq 2 + 3 + ... + 15$, de unde $2 \leq s \leq 119$. 2p

Pentru $2 \leq s \leq 113$ avem $S = \mathcal{M}113! + s = \mathcal{M}s$, de unde concluzia că S este număr compus. 2p

Pentru $s \in \{114, 116, 118\}$ avem S număr par, prin urmare S este număr compus.

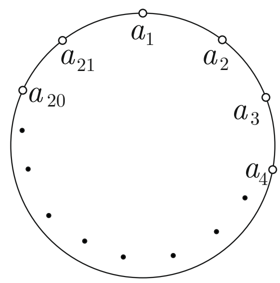
Dacă $s = 115$, atunci $S = \mathcal{M}5$

Dacă $s = 117$, atunci $S = \mathcal{M}3$

Dacă $s = 119$, atunci $S = \mathcal{M}7$ 3p

Problema 4.5 Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulţimii $\{1, 2, \dots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$
$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$
$$\dots$$
$$S_{17} = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},$$
$$S_{18} = a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.$$



Arătaţi că cel puţin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5.

Soluţie Presupunem că S_1, S_2, ..., S_{18} dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. Deoarece $S_1 = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ şi $S_2 = (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6$, dacă S_1 şi S_2 dau acelaşi rest la împărţirea cu 5, deducem că a_1 şi a_6 dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. În acelaşi fel deducem

1. a_1, a_6, a_{11}, a_{16} şi a_{21} dau acelaşi rest, x, la împărţirea cu 5.
2. a_2, a_7, a_{12}, a_{17} dau acelaşi rest, a, la împărţirea cu 5.
3. a_3, a_8, a_{13}, a_{18} dau acelaşi rest, b, la împărţirea cu 5.
4. a_4, a_9, a_{14}, a_{19} dau acelaşi rest, c, la împărţirea cu 5.
5. $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}$ dau acelaşi rest, d, la împărţirea cu 5. .... 2p

Cum $\{a_1, a_2, ..., a_{21}\} = \{1, 2, ..., 21\}$ avem 5 resturi egale cu 1 şi câte 4 resturi egale cu 2, 3, 4 sau 0.

Rezultă $x = 1$ şi $\{a, b, c, d\} = \{0, 2, 3, 4\}$ 1p

Avem $S_1 = \mathcal{M}5 + 1 + 0 + 2 + 3 + 4 = \mathcal{M}5$ şi $S_{18} = \mathcal{M}5 + b + \mathcal{M}5 + c + \mathcal{M}5 + d + \mathcal{M}5 + 1 + \mathcal{M}5 + 1 = \mathcal{M}5 + 2 + (a + b + c + d) - a = \mathcal{M}5 + 11 - a$

Cum S_1 şi S_{18} dau acelaşi rest la împărţirea cu 5 deducem că $11 - a = \mathcal{M}5$, de unde $a = 1$; contradicţie. Rezultă că cel puţin două sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5. .... 4p