COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a IX-a

1. Calculați suma $S=\left\lfloor\sqrt{1\cdot 2}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{2\cdot 3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\sqrt{n\cdot(n+1)}\right\rfloor$, funcție de $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare dacă și numai dacă pentru orice punct M din plan, există numerele reale a, b, c, nu toate nule, având suma zero, astfel încât
$$a\cdot\overrightarrow{MA}+b\cdot\overrightarrow{MB}+c\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

3. Fie $a=2+2\sqrt{3}$, $b=2-2\sqrt{3}$ și $S_n=a^n+b^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $S_{n+2}=4S_{n+1}+8S_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $S_n\in\mathbb{N}^*$, 2^{3n-1} divide S_{2n-1} și 2^{3n+1} divide S_{2n}, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

4. Fie ΔABC și punctele $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$, $C'\in(AB)$ astfel încât cevienele AA', BB' și CC' sunt concurente în M. Arătați că:

a) $\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}\geq 8$;

b) M este centrul de greutate al triunghiului dacă și numai dacă $\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}=8$.

Subiect elaborat de prof. Sergiu Prisacariu

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2013

Clasa a IX-a

1. Întrucât $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\lfloor n(n+1) \rfloor = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În aceste condiții, $S = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Observăm că: *A*, *B*, *C* sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = t \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*$ a.î. $(t-1)\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - t\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, prin urmare este adevărată cerința problemei.

3. a) Observăm că $a + b = 4$, iar $ab = -8$; rezultă că $4S_{n+1} + 8S_n = (a+b)\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) - -ab\left(a^n + b^n\right) = a^{n+2} + b^{n+2} + ab\left(a^n + b^n\right) - ab\left(a^n + b^n\right) = S_{n+2}$.

b) Notăm cu $P(n)$ propoziția "$S_{2n-1}, S_{2n} \in \mathbb{N}^*$, 2^{3n-1} divide S_{2n-1} și 2^{3n+1} divide S_{2n}", pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $S_1 = 4$ și $S_2 = 32$, $P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că este adevărată $P(n+1)$. Avem: $S_{2n+1} = 4S_{2n} + 8S_{2n-1} = 4 \cdot 2^{3n+1} \cdot s + 8 \cdot 2^{3n-1} \cdot t$, cu $s, t \in \mathbb{N}^*$, deci S_{2n+1} este număr natural nenul, divizibil cu 2^{3n+2}. Analog se procedează pentru S_{2n+2}.

4. a) Folosind relația lui Van Aubel și inegalitatea mediilor MA ≥ MG, obținem că

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{AC'}{BC'} + \frac{AB'}{CB'} \geq 2\sqrt{\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{AB'}{CB'}}$$

și încă două relații similare. Înmulțind membru cu membru cele trei inegalități și efactuând simplificările, rezultă inegalitatea dorită.

b) Egalitatea se atinge dacă și numai dacă $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'}$ și analoagele, adică $B'C' \parallel BC$ și analoagele, i.e. patrulaterele $AC'A'B'$, $BA'B'C'$ și $CB'C'A'$ sunt paralelograme, fapt care se petrece atunci și numai atunci când AA', BB' și CC' sunt medianele triunghiului.