



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016**

CLASA a VII-a

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră numerele raționale $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}$
 $b = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}$

- Comparați numerele a și b.
- Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația $|x - b| = a$.
- Stabiliți dacă : i) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât nb și na să fie simultan numere naturale ?
ii) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât nb și na să fie numere naturale consecutive?

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\sqrt{x^2 - 1900} = \left| \frac{x}{4} - 4 \right| - \sqrt{2017 - x^2}$.

(Gazeta Matematică)

3. Fie ΔABC cu $AB \neq AC$, G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în ΔABC astfel încât $GI \parallel BC$.

- Dacă AF este bisectoarea unghiului A, $F \in (BC)$, demonstrați că $AI = 2 IF$;
- Demonstrați că $AB + AC = 2 BC$.

4. Fie ABCD un paralelogram, M și N mijloacele laturilor AB, respectiv BC.

Notăm $AC \cap DM = \{E\}$ și $MN \cap BE = \{T\}$. Știind că $DM \perp AC$ și $DA \perp AT$:

- Determinați $m(\sphericalangle ADM)$.
- Demonstrați că ΔANB este isoscel.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1: Se consideră numerele raționale $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}$
 $b = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}$

- Comparați numerele a și b.
- Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația $|x - b| = a$.
- Stabiliți dacă : i) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât nb și na să fie simultan numere naturale ?
ii) există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât nb și na să fie numere naturale consecutive?

Autor: prof.Preda Traian

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) a și b au câte 1008 termeni $\frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{4 \cdot 5}; \dots; \frac{1}{2015 \cdot 2016} > \frac{1}{2016 \cdot 2017} \Rightarrow a > b$	1p
b) $x - b \in \{-a; a\} \Rightarrow x \in \{b - a; b + a\}$	1p
$b - a < 0$ nu convine	1p
$x = b + a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} =$ $= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2017} = \frac{2016}{2017}$	1p
c) i) Pentru un număr ce verifică cerința. De exemplu n=2017!	1p
ii) $a > b \Rightarrow na = k + 1, nb = k \Rightarrow na + nb = 2k + 1 \Rightarrow n(a + b) = 2k + 1$	1p
$n \cdot \frac{2016}{2017} = 2k + 1 \Rightarrow 2016n = (2k + 1)2017 \Rightarrow \text{par} = \text{impar} \Rightarrow \text{contradicție}$	1p

Subiectul 2: Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\sqrt{x^2 - 1900} = \left| \frac{x}{4} - 4 \right| - \sqrt{2017 - x^2} .$$

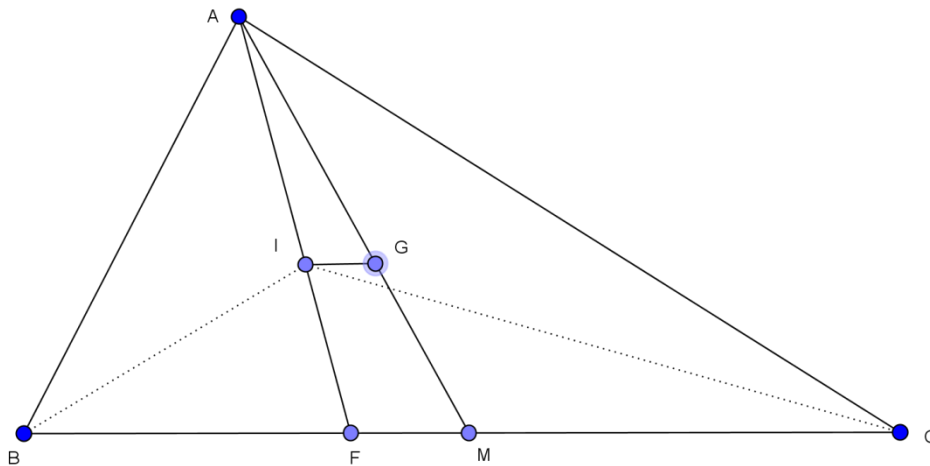
Autor: Gazeta Matematica nr 11/ 2015

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}; a; b \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b$ pătrate perfecte	1p
$x^2 - 1900$ si $2017 - x^2$ pătrate perfecte	1p
$1900 \leq x^2 \leq 2017$	1p
$x^2 = 1936$	1p
$x \in \{-44; 44\}$	1p
$x = 44$ nu verifică	1p
$x = -44$ soluție unică	1p

Subiectul 3 : Fie ΔABC cu $AB \neq AC$, G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în ΔABC astfel încât $GI \parallel BC$.

- Dacă AF este bisectoarea unghiului A , $F \in (BC)$, demonstrați că $AI = 2 IF$;
- Demonstrați că $AB + AC = 2 BC$.

Autor: prof. Olteanu Cristian



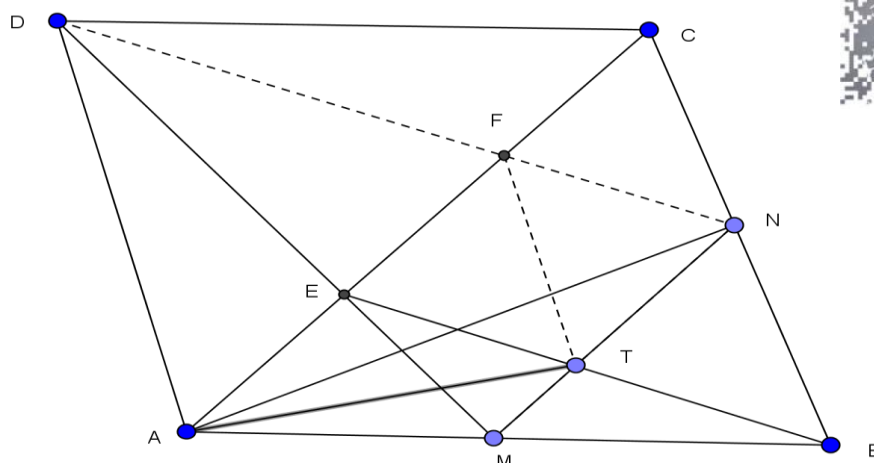
Detalii rezolvare	Barem asociat
a) În ΔAMF , $GI \parallel MF \Rightarrow$ conform Thales $\frac{AI}{IF} = \frac{AG}{GM}$	1p
G centrul de greutate $\Rightarrow \frac{AI}{IF} = 2 \Rightarrow AI = 2 IF$	1p

b) Folosind teorema bisectoarei în ΔABF și $\Delta AFC \Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{AF}{CF} = 2$	2p
și $\frac{AC}{CF} = \frac{AF}{CF} = 2$	
$AB = 2 BF; AC = 2 CF$	2p
$AB+AC=2(BF+CF)=2 BC$	1p

Subiectul 4 : Fie ABCD un paralelogram, M și N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Notăm $AC \cap DM = \{E\}$ și $MN \cap BE = \{T\}$. Știind că $DM \perp AC$ și $DA \perp AT$:

- a) Determinați $m(\sphericalangle ADM)$.
b) Demonstrați că ΔANB este isoscel.

Autor: Prof. Preda Traian



Detalii rezolvare	Barem asociat
Notăm $AC \cap DN = \{F\} \Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CN}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{1}{3} AC$; $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow AE = \frac{1}{3} AC \Rightarrow AE = EF = FC$	2p
DE înălțime și mediană în $\Delta ADF \Rightarrow \Delta DAF$ isoscel	1p
FT linie mijlocie în $\Delta BEC \Rightarrow FT \parallel BC, AT \perp AD \Rightarrow AT \perp TF \Rightarrow \Delta ATF$ dreptunghic $\Rightarrow TE$ mediană $\Rightarrow (TE) \equiv (AE) \equiv (EF)$ $\sphericalangle DFE \equiv \sphericalangle FET$ (alterne interne); $\sphericalangle DFE \equiv \sphericalangle DAF$	1p
$m(\sphericalangle FET) = 2m(\sphericalangle EAT) \Rightarrow 3m(\sphericalangle EAT) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EAT) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ADM) = 30^\circ$	1p
$m(\sphericalangle DAF) = 60^\circ, \Delta DAF$ isoscel $\Rightarrow \Delta DAF$ echilateral $\Rightarrow \Delta CFN$ echilateral $\Rightarrow DN = AC$ $\Rightarrow ANCD$ trapez isoscel $\Rightarrow AN = CD = AB \Rightarrow \Delta ANB$ isoscel.	2p