INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a XII-a

PROBLEMA 1

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}}dx\right).$

(Gazeta matematică)

Soluţie:

$\frac{1}{2}-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}}dx = \int_0^1 x dx-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}}dx = \int_0^1 \frac{xdx}{1+e^{nx}}.$ Avem …………………………….. 2p

$\boxed{0\le \frac{x}{1+e^{nx}}\le \frac{x}{e^{nx}}}$ pentru orice ……………………………………….2p

Rezultă $0\le \int_0^1 \frac{x}{1+e^{nx}} \le \int_0^1 xe^{-nx}dx = \int_0^1 x\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)' dx = -x\frac{e^{-nx}}{n}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}dx$

$$= -x\frac{e^{-nx}}{n}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}dx = -\frac{e^{-n}}{n}-\frac{e^{-nx}}{n^2}\Big|_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n}-\frac{e^{-n}}{n^2}+\frac{1}{n^2}. \quad \text{2p}$$

Atunci $0\le \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}}dx\right)\le \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^n n}+\frac{1}{n}\right)=0,$ deci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}}dx\right)=0. \quad \text{1p}$$

PROBLEMA 2

Calculați $\int x \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad x\in(0,\infty).$

Soluţie:

Se ştie că $\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}$ și $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}, \quad \forall x\in(0,\infty).$ 2p

Rezultă $\int x \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1}dx = \int\left(x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-x\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\right)dx =$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

$$=\int\left[x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)-x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+1)\right)\right]dx=$$

$$=-\int x\operatorname{arctg}x\,dx+\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,dx= \qquad 1p$$

$$=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\operatorname{arctg}(x+1)\,dx-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+(x+1)^2}dx-\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+x+2-x-2}{x^2+x+2}dx= \qquad 1p$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)+\frac{1}{2}x-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{x^2+x+2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+2}dx= \qquad 1p$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x\right)-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+2\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C. \qquad 2p$$

PROBLEMA 3

Fie $G=(-k,k)$ unde $k>0$ şi operaţia $x*y=\dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$.

a) Arataţi că G este parte stabilă în raport cu operaţia $*$.

b) Fie $f:R\to G,\ f(x)=\dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{x+k}{x-k}$. Arataţi că f este izomorfism între grupurile $(R,+)$ şi $(G,*)$

<u>Soluţie:</u>

a) $-k<x<k\Rightarrow x+k>0\ si\ x-k<0;\ -k<y<k\Rightarrow y+k>0\ si\ y-k<0$ 1p

$$(x+k)(y+k)>0\Rightarrow xy+k^2>-k(x+y)\Rightarrow -1<\frac{k(x+y)}{k^2+xy}$$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

$(x-k)(y-k) > 0 \Rightarrow xy + k^2 > k(x+y) \Rightarrow 1 > \frac{k(x+y)}{k^2+xy}, \quad k^2 + xy > 0$ 1p

$-1 < \frac{k(x+y)}{k^2+xy} < 1 \Rightarrow -k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k, \quad k > 0 \Rightarrow G \ parte \ stabila$ 1p

b) Demonstrarea bijectivităţii funcţiei f 2p

f(x) este continuă şi derivabilă pe (-k,k) cu $f'(x) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{x-k}{x+k} \cdot \frac{(x-k)-(x+k)}{(x-k)^2} = \frac{1}{k^2-x^2}$

$f'(x) > 0, \forall x \in (-k,k) \Rightarrow f - strict \ crescătoare$

$\lim_{x \to k} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -k} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow f(x)$ - funcţie bijectivă

Demonstrarea că funcţia f este morfism, adică $f(x*y) = f(x) + f(y)$ 2p

$$f(x*y) = \frac{1}{2k} ln \frac{\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} + k}{\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} - k} = \frac{1}{2k} ln \frac{k(x+y) + k^2 + xy}{k(x+y) - (k^2+xy)}$$

$$f(x) + f(y) = \frac{1}{2k}\left(ln\frac{x+k}{x-k} + ln\frac{y+k}{y-k}\right) = \frac{1}{2k} ln \frac{k(x+y) + k^2 + xy}{k(x+y) - (k^2+xy)}$$

c) $\Rightarrow f(x*y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f$ - morfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ si $(G,*)$

PROBLEMA 4

Fie G un grup multiplicativ cu proprietățile : $(xy)^3 = x^3y^3$, $(xy)^4 = x^4y^4$, $(xy)^5 = x^5y^5$, $\forall x, y \in G$

Să se arate că grupul G este comutativ.

<u>Soluţie:</u>

Ținând cont de egalitățile din enunț, avem : $x^4y^4 = (xy)^4 = (xy)^3xy = x^3y^3xy \ de \ unde \ xy^3 = y^3x$. ……2p

Deci x comută cu y^3 și, ca urmare, x comută cu orice putere întreagă a lui y^3. Rezultă $xy^{3n} = y^{3n}x \ \forall n \in Z$. ..1p

Analog obținem $x^5y^5 = (xy)^5 = (xy)^4xy = x^4y^4xy \ de \ unde \ xy^4 = y^4x$. Deci $xy^{4k} = y^{4k}x \ \forall k \in Z$. ……2p

Numerele 3 și 4 sunt prime între ele și deci există $n,k \in Z$ astfel încât 3n+4k=1. Putem scrie

$xy = xy^{3n+4k} = (xy^{3n})y^{4k} = (y^{3n}x)y^{4k} = y^{4k}(y^{3n}x) = y^{3n+4k}x = yx$. Deci grupul G este comutativ. ……2p