MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ
2015. február 28.

VII . OSZTÁLY

1.) Adott $n=(-1)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-3)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot(-5)^{-5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{-6}$. Határozd meg azt a legnagyobb zérótól különböző m egész számot, amelyre $\sqrt{2\cdot\sqrt{n\cdot m}}\in\mathbf{Q}$!

2.) Áginak megtetszett egy pulóver, és pénzének 80%-áért meg is vette. Később kapott nagymamájától a születésnapjára 30 lejt. Rájött, hogy ha az így összegyűlt pénzét még 25%-kal megnöveli, akkor ugyanannyi pénze lesz, mint vásárlás előtt. Hány leje volt Áginak eredetileg?

3.) Adott az ABC háromszög és az $M\in[AB]$ és $N\in[AC]$ pontok úgy, hogy $AM=3\cdot MB$ és $4\cdot AN=3\cdot AC$.

a) Bizonyítsd be, hogy az MN és BC egyenesek párhuzamosak!

b) Számítsd ki az AMN és ABC háromszögek területeinek arányát!

4.) Az $ABCD$ paralelogrammában a $CAD\sphericalangle$ szögfelezője a DC egyenest az E pontban metszi, a BE egyenes az AD egyenest pedig F pontban metszi. Mutasd ki, hogy $\frac{AF}{AD}-\frac{AD}{AC}=1$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A VII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$n=-1\cdot 2^2\cdot(-3)^{-3}\cdot 4^4\cdot(-5)^5\cdot 6^6=-2^2\cdot 3^{-3}\cdot 2^8\cdot 5^{-5}\cdot(2\cdot 3)^6$	**1p**
	$n=-2^{16}\cdot 3^3\cdot 5^{-5}=\dfrac{-2^{16}\cdot 3^3}{5^5}$	**3p**
	$\sqrt{n\cdot m}\in Q\Rightarrow m\in Z_-$	**2p**
	$\sqrt{2\cdot\sqrt{n\cdot m}}=\sqrt{\sqrt{4\cdot n\cdot m}}\in Q\Rightarrow\sqrt{\sqrt{-2^2\cdot\dfrac{2^{16}\cdot 3^3}{5^5}\cdot m}}=\sqrt{\sqrt{-\dfrac{2^{18}\cdot 3^3}{5^5}\cdot m}}\in Q\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m=-3\cdot 5\cdot 2^2\cdot k^4=-60k^4$ de unde pentru $k=1\Rightarrow m_{\max}=-60$	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Notăm cu x suma inițială. După cumpărarea bluzei Alina va avea $100\%-80\%=20\%$ din banii săi, deci $x\cdot\dfrac{20}{100}$.	**1p**
	$x\cdot\dfrac{20}{100}+30+x\cdot\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{1}{4}+30\cdot\dfrac{1}{4}=x$	**3p**
	$30+7{,}5=x\cdot\left(1-\dfrac{20}{100}-\dfrac{5}{100}\right)\Rightarrow 37{,}5=x\cdot\dfrac{75}{100}$	**3p**
	$x=37{,}5\cdot\dfrac{100}{75}\Rightarrow x=\dfrac{3750}{75}=50$ Deci Alina a avut inițial 50 de lei.	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{3}{1}$	**2p**
	$\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{3}{4}$, deci $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{3}{1}$	**2p**
	Folosirea teoremei reciproce a teoremei lui Thales	**2p**
b)	$\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{3}{4}$ de unde obținem $\dfrac{A_{AMN}}{A_{ABC}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$DE\,\|\,AB\Rightarrow\sphericalangle AFB\sim\sphericalangle DFE\Rightarrow\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{AB}{DE}\Leftrightarrow\dfrac{AF}{AF-DF}=\dfrac{AB}{AB-DE}\Leftrightarrow$	**3p**
	$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AB}{EC}$ (1)	**1p**
	În $\sphericalangle DAC$, AE bisectoare $\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{EC}$ (2)	**2p**
	Din (1) și (2) $\Rightarrow\dfrac{AF}{AD}-\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{EC}-\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{EC}{EC}=1.$	**3p**