OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Fie a şi b numere naturale nenule.
   (a) Dacă $7|(2a+5b)$, arătaţi că $7|(5a+2b)$.
   (b) Dacă $7|(5a+2b)$, iar $a=2^0+2^1+2^2+...+2^{2012}$, arătaţi că b se divide prin 7.
   (c) Aflaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $5a+2b$ este egal ce cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 7 şi 5.

Dorina Bocu

2. (a) Să se scrie numărul natural 12 ca diferenţă de pătrate perfecte de numere naturale nenule.
   (b) Să se atate că numărul $A = 24\cdot 2^{2n-1} + 12\cdot 2^{2n+2} + 6\cdot 2^{2n-3}$, $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ se poate scrie ca suma a două diferenţe de pătrate perfecte de numere naturale nenule.

Emanuel Munteanu

3. Un râu curge în linie dreaptă, trecând prin localităţile A_1, A_2, A_3, ..., A_{2014}, A_{2015}, astfel încât $A_1A_3=2A_1A_2$, $A_1A_4=2A_1A_3$, $A_1A_5=2A_1A_4$, ..., $A_1A_{2015}=2A_1A_{2014}$. Un drum drept, ce trece peste podul din oraşul A_{2014}, leagă două oraşe B şi C, situate de o parte şi de alta a râului, egal depărtate de pod.
   (a) Dacă distanţa dintre localităţile A_1 şi A_2 este de 2 km, aflaţi distanţa dintre A_4 şi A_8.
   (b) Comparaţi distanţa dintre B şi A_1 cu distanţa dintre C şi A_{2015}.

Dorina Rapcea

4. Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ numere naturale nenule. Arătaţi că numărul
$$A = 2014^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_{2013}+a_1)} - 6$$
are cel puţin trei divizori diferiţi de 1.

Gazeta Matematică 6-7-8/2014.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

Clasa a VI-a

1. *Fie a şi b numere naturale nenule.*
(a) Dacă $7|(2a+5b)$, arătaţi că $7|(5a+2b)$.
(b) Dacă $7|(5a+2b)$, iar $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2012}$, arătaţi că b se divide prin 7.
(c) Aflaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care $5a+2b$ este egal ce cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 7 şi 5.
Soluţie.
(a) Din ipoteză, $7|(2a+5b)$. Dar, $7|(7a+7b)$, deci 7 va divide şi diferenţa celor două numere, adică $7|(5a+2b)$. **(2p)**
(b) a conţine 2013 termeni care se pot grupa 3 câte 3.

$$\begin{aligned} a &= \left(1+2+2^2\right) + 2^3 \cdot \left(1+2+2^2\right) + ... + 2^{2010} \cdot \left(1+2+2^2\right) \\ &= 7 \cdot \left(1+2^3+...+2^{2010}\right) \vdots 7. \end{aligned}$$

Deci $7|a$, dar $7|(5a+2b)$, rezultă $7|2b$ şi $7|b$. **(2p)**

(c) $5a+2b = 70 \Longrightarrow 5a = 2\cdot(35-b) \Longrightarrow a = \frac{2\cdot(35-b)}{5} \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (35-b) \vdots 5 \Longrightarrow b \in \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$ $\Longrightarrow (a,b) \in \{(12,5); (10,10); (8,15); (6,20); (4,25); (2,30)\}$. **(2p)**

2.
(a) Să se scrie numărul natural 12 ca diferenţă de pătrate perfecte de numere naturale nenule.
(b) Să se atate că numărul $A = 24\cdot 2^{2n-1} + 12\cdot 2^{2n+2} + 6\cdot 2^{2n-3}$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$ se poate scrie ca suma a doă diferenţe de pătrate perfecte de numere naturale nenule.
Soluţie.
(a) $12 = 4\cdot 3 = 4\cdot(4-1) = 4^2 - 4 = 4^2 - 2^2$. **(2p)**
(b)

$$\begin{aligned} 24\cdot 2^{2n-1} &= 3\cdot 2^3\cdot 2^{2n-1} = (4-1)\cdot 2^{2n+2} = 2^2\cdot 2^{2n+2} - 2^{2n+2} \\ &= \left(2^{n+2}\right)^2 - \left(2^{n+1}\right)^2, \\ 12\cdot 2^{2n+2} &= 3\cdot 2^2\cdot 2^{2n+2} = (4-1)\cdot 2^{2n+4} = 2^2\cdot 2^{2n+4} - 2^{2n+4} \\ &= \left(2^{n+3}\right)^2 - \left(2^{n+2}\right)^2, \\ 6\cdot 2^{2n-3} &= 3\cdot 2\cdot 2^{2n-3} = (4-1)\cdot 2^{2n-2} = \left(2^n\right)^2 - \left(2^{n-1}\right)^2. \qquad \textbf{(3p)} \end{aligned}$$

Rezultă $A = \left(2^{n+3}\right)^2 - \left(2^{n+1}\right)^2 + \left(2^n\right)^2 - \left(2^{n-1}\right)^2$. **(2p)**

3. *Un râu curge în linie dreaptă, trecând prin localităţile A_1, A_2, A_3, ..., A_{2014}, A_{2015}, astfel încât $A_1A_3 = 2A_1A_2$, $A_1A_4 = 2A_1A_3$, $A_1A_5 = 2A_1A_4$, ..., $A_1A_{2015} = 2A_1A_{2014}$.*
Un drum drept, ce trece peste podul din oraşul A_{2014}, leagă două oraşe B şi C, situate de o parte şi de alta a râului, egal depărtate de pod.
(a) Dacă distanţa dintre localităţile A_1 şi A_2 este de 2 km, aflaţi distanţa dintre A_4 şi A_8.
(b) Comparaţi distanţa dintre B şi A_1 cu distanţa dintre C şi A_{2015}.
Soluţie.
(a)

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= 2\text{km} \\ A_1A_3 &= 2A_1A_2 = 2\cdot 2\text{km} = 4\text{km}, \\ A_1A_4 &= 2A_1A_3 = 2\cdot 4\text{km} = 8\text{km}, \\ A_1A_5 &= 2A_1A_4 = 2\cdot 8\text{km} = 16\text{km}, \\ A_1A_6 &= 32\text{km}, \qquad A_1A_7 = 64\text{km}, \qquad A_1A_8 = 128\text{km}.\textbf{(2p)} \end{aligned}$$

Atunci, $A_4A_8 = A_1A_8 - A_1A_4 = 128\text{km} - 8\text{km} = 120\text{km}$. **(1p)**
(b) Ştiind că $A_1A_{2015} = 2A_1A_{2014} \Longrightarrow A_1A_{2014} = A_{2014}A_{2015}$. Dar, $BA_{2014} = CA_{2014}$ şi $\widehat{A_1A_{2015}B} = \widehat{CA_{2014}A_{2014}}$. Rezultă (L.U.L) $\Delta A_1A_{2015}B \equiv \Delta CA_{2014}A_{2014} \Longrightarrow BA_1 = CA_{2015}$.

4. *Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ numere naturale nenule. Arătaţi că numărul*

$$A = 2014^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_{2013}+a_1)} - 6$$

are cel puţin trei divizori diferiţi de 1.
Soluţie.
Din 2013 numere naturale, există cel puţin două care au aceeaşi paritate. **(1p)**
Deci, în produsul $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)...(a_{2013} + a_1)$ există cel puţin un factor par, deci $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)...(a_{2013} + a_1) = \text{par}$. **(2p)**

$U(2014^{2p}) = U(2014^2)^p = (...6)^p = ...6 \Longrightarrow U(A) = 0 \Longrightarrow A \vdots 2, 5, 10$, deci A are cel puţin 3 divizori diferiţi de 1.