



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureș

Clasa a VII-a

1. Arătați că are loc relația:

a)
$$\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}+1} = \frac{2^k}{(2^{k+1}) \cdot (2^{k+1}+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

b) Aflați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{8}{9 \cdot 17} + \dots + \frac{2^n}{(2^n+1) \cdot (2^{n+1}+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{2014}-1}{2^{2015}+1}$$

2. Arătați că numărul $A = 1^p + 2^p + \dots + 2014^p$ este divizibil cu 5, unde p este un număr natural care nu este divizibil cu 4.

Suplimentul Gazetei Matematice 1/2014

3. Fie $ABCD$ un paralelogram. Notăm A_1 simetricul lui A față de B , B_1 simetricul lui B față de C , C_1 simetricul lui C față de D și D_1 simetricul lui D față de A .

a) Arătați că $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

b) Paraleloramele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ au același centru de simetrie.

Suplimentul Gazetei Matematice 11/2013

4. Fie triunghiul ABC isoscel, de bază BC , $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $(BD) \equiv (AE)$. Dacă M este mijlocul segmentului (CD) și N este mijlocul segmentului (AE) , arătați că $MN \perp BC$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate și prelucrate de: prof. Nagy Anamaria – Șc. Gim. „Lucian Blaga” Baia Mare,

prof. Neaga Nadina – Șc. Gim. „Dr. Victor Babeș” Baia Mare

Barem de corectare

Problema 1.

- a) Aducere la numitor comun.....2p
Finalizare.....1p
b) Observarea regulii de formare a fracțiilor.....2p
 $\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{2014}-1}{2^{2015}+1}$1p
 $n = 2014$1p

Problema 2.

- $p \in \{4k + 1; 4k + 2; 4k + 3\}$2p
Dacă $p = 4k + 1 \Rightarrow U(A) = 5 \Rightarrow A : 5$2p
 $p = 4k + 2 \Rightarrow U(A) = 5 \Rightarrow A : 5$2p
 $p = 4k + 3 \Rightarrow U(A) = 5 \Rightarrow A : 5$2p

Problema 3.

- Desen.....1p
 $\Delta C_1DD_1 \equiv \Delta A_1BB_1 \Rightarrow (C_1D_1) \equiv (A_1B_1)$1p
 $\Delta AD_1A_1 \equiv \Delta CB_1C_1 \Rightarrow (A_1D_1) \equiv (B_1C_1)$1p
 $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.....1p
b) $AC \cap BD = \{O\}$ mijlocul diagonalelor.....0,5p
 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = \{Q\}$ mijlocul diagonalelor.....0,5p
 $A_1A \parallel CC_1, (A_1A) \equiv (CC_1) \Rightarrow AC_1A_1C$ paralelogram.....1p
 $AC \cap A_1C_1 = \{O\} = \{Q\}$1p

Problema 4.

- Desen.....1p
Fie P mijlocul (ED).
 $MP \parallel CE, MP = \frac{CE}{2}, NP \parallel AD, NP = \frac{AD}{2}, CE = AD \Rightarrow MP = NP \Rightarrow \widehat{M} \equiv \widehat{N}$2p
 $MP \parallel AC, NP \parallel AB \Rightarrow m(\widehat{MPN}) = 180^\circ - m(\widehat{A}) \Rightarrow m(\widehat{M}) = m(\widehat{N}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$2p
 $MN \perp BC$2p