INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada de matematică

Etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VII-a

1) Fie numărul real a = $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ \dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Stabiliţi căreia din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ aparţine numărul a.

2) a) Aflaţi toate numerele naturale pătratele perfecte de forma $\overline{6xyz6}$.

b) Arătați că x = $\sqrt{73+40\sqrt{3}}$ + $\sqrt{97\ -56\sqrt{3}}$ este număr natural.

3) Pe laturile AB și BC ale pătratului ABCD se iau punctele M și N, M ∈ (AB), N ∈ (BC) astfel încât AM = BN. Arătați că:

a) dreptele MD și NA sunt perpendiculare;

b) triunghiul ADP și patrulaterul convex MBNP au arii egale, unde P este punctul de intersecție al dreptelor MD și NA.

4) Fie punctul P pe prelungirea diagonalei AC a patrulaterului ABCD, C între A și P. Paralela prin P la BC intersectează dreapta AB în punctul M. Paralela prin P la CD intersectează dreapta AD în punctul N. Arătați că:

a) MN ∥ BD;

b) $\frac{AB}{AM}+\frac{DN}{AN}=1.$

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozialalomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Barem de corectare și notare

Olimpiada de matematică, etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VII-a

Notă : Orice soluţie corectă, diferită de cea din barem, se notează cu punctajul corespunzător.

1) Fie numărul real a = $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ \dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Stabiliţi căreia din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aparţine numărul a.

Soluție:

Amplificăm fiecare fracție cu conjugatul numitorului . . 2p

a = $\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$ . . 2p

După reducerea termenilor asemenea obținem a = $\sqrt{100}-\sqrt{1}$. 1p

Deci a = 10 – 1 = 9 . . . . 1p

Finalizare: a ∈ $\mathbb{N}$. 1p

Total: 7p

2) a) Aflaţi toate numerele naturale pătratele perfecte de forma $\overline{6xyz6}$.

b) Arătați că x = $\sqrt{73+40\sqrt{3}}$ + $\sqrt{97\ -56\sqrt{3}}$ este număr natural.

Soluție:

a) Avem: 60006 ≤ $\overline{6xyz6}$ ≤ 69996, deci $\sqrt{60006} \le \sqrt{\overline{6xyz6}} \le \sqrt{69996}$, 1p

Cum $\sqrt{60006}$ = 244,9… și $\sqrt{69996}$ = 264,5… . . . . 1p rezultă că 245 ≤ $\sqrt{\overline{6xyz6}}$ ≤ 264. . . . . . 1p

Ținând cont și de ultima cifră avem $\sqrt{\overline{6xyz6}}$ ∈{ 246, 254, 256, 264 } 1p

Finalizare: $\overline{6xyz6}$ ∈ { 60516, 64516, 65536, 69696 } . . . 1p

b) Folosind formula radicalilor dubli (compuși), obținem

$\sqrt{73+40\sqrt{3}}$ = 5 + 4$\sqrt{3}$ și $\sqrt{97-56\sqrt{3}}$ = 7 − 4$\sqrt{3}$ . . 1p

Finalizare: după reducerea termenilor asemenea, avem x = 12 ∈ $\mathbb{N}$ 1p

Total: 7p

3) Pe laturile AB și BC ale pătratului ABCD se iau punctele M și N, M ∈ (AB), N ∈ (BC) astfel încât AM = BN. Arătați că:

a) dreptele MD și NA sunt perpendiculare;

b) triunghiul ADP și patrulaterul convex MBNP au arii egale, unde P este punctul de intersecție al dreptelor MD și NA.

Soluție:

a) Avem ΔDAM = ΔABN în cazul LUL 1p

rezultă că ∢ADM = ∢BAN (1) 1p

∢DPN = ext ΔAPD, rezultă că m(∢DPN) = m(∢PAD) + m(∢ADM) (2) 1p

Din relațiile (1) și (2) rezultă că m(∢DPN) = m(∢PAD) + m(∢BAN) =

= m(∢DAB) = 90^0, deci MD ⊥ NA. 1p

b) De la puctul a) știm că ΔDAM = ΔABN, deci $\mathcal{A}_{\Delta DAM} = \mathcal{A}_{\Delta ABN}$ (3) . 1p

Scădem din ambii membri ai relației (3) $\mathcal{A}_{\Delta APM}$ . . . 1p

Finalizare: obținem că $\mathcal{A}_{\Delta ADP} = \mathcal{A}_{\Delta MBNP}$. . . . 1p

Total: 7p

4) Fie punctul P pe prelungirea diagonalei AC a patrulaterului ABCD, C între A și P. Paralela prin P la BC intersectează dreapta AB în punctul M. Paralela prin P la CD intersectează dreapta AD în punctul N. Arătați că:

a) MN ∥ BD;

b) $\frac{AB}{AM} + \frac{DN}{AN} = 1.$

Soluție:

a) Figura 1p

Aplicând teorema lui Thales pentru ΔABC și BC ∥ MP, obținem $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AP}$ (1) 1p

Aplicând teorema lui Thales pentru ΔADC și DC ∥ NP, obținem $\frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AP}$ (2) 1p

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$ 1p

Finalizare: conform reciprocei teoremei lui Thales în ΔABD avem MN ∥ BD. 1p

b) Aplicând teorema lui Thales pentru ΔADC și DC ∥ NP, obținem $\frac{DN}{AN} = \frac{CP}{AP}$ (3) 1p

Finalizare: Adunând membru cu membru relațiile (1) și (3) și ținând cont că

AC + CP = AP, obținem $\frac{AB}{AM} + \frac{DN}{AN} = 1.$ 1p

Total: 7p