OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a IX-a

Subiecte:

1. Numerele reale a, b, c, d verifică relația $a+b+c+d=2$. Să se arate că:
   a) $\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2+b^2$.

   b) $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule și mulțimea
$$A=\left\{p \in \mathrm{N}^* \,\middle|\, a_{a_p}=a_p+a_{p+1}\right\}$$
   Să se arate că dacă 2014 este termen al progresiei și $A \neq \varnothing$, atunci $A=\mathrm{N}^*$.

   Prof.Burtea Marius, Alexandria

3. Se consideră patrulaterul convex *ABCD* , punctele M și N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AD]$, iar punctele P, Q simetricele punctului C în raport cu punctele M, respectiv N.
   a). Să se arate că $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DQ}$.
   b).Dacă $\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=3\,\overrightarrow{CA}$, să se arate că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
   c). Dacă E, F sunt mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[PQ]$ să se arate că punctele C, A, E, F sunt coliniare sau sunt vârfurile unui paralelogram.

   Prof.Burtea Marius, Alexandria

4. Fie ABC un triunghi , $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ și punctele D și E astfel încât $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BC}$. Să se arate că punctele A, D, E sunt coliniare.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a IX-a

1. a) Se obține $0 \leq (a-b)^2$ ………………………………………….3p
   b) Folosind inegalitatea precedentă, rezultă:
   $(a^2+b^2)+(c^2+d^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+d)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(c+d)^2\right] \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{2}=\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}=1$ …………………………………………………..4p

2. Fie $p \in N^*$ cu proprietatea că $a_{a_p}=a_p+a_{p+1}$. Se obține că $a_1+(a_p-1)r=a_1+(p-1)r+a_1+pr$ sau $a_1=(a_p-2p)r$, deci a_1 se divide cu r. Fie $a_1=mr, m \in N^*$. Rezultă că $mr=(a_1+(p-1)r-2p)r$ sau, după simplificare, $m=mr+(p-1)r-2p$ care se poate scrie $r(m+p-1)=m+2p$, de unde $r=\frac{2p+m}{p+m-1}=1+\frac{p+1}{m+p-1} \in N^*$. Din această relație este necesar ca $m \in \{1,2\}$ ……………………………………………………………..4p

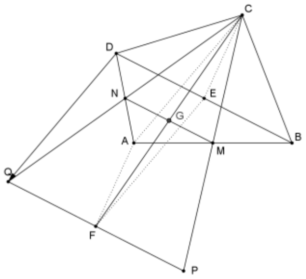
- Pentru $m=1$ se obține că $r=2+\frac{1}{p} \in N^*$ pentru $p=1$. Așadar $r=3$, $a_1=3$ și $a_n=3n$. În acest caz $a_n \neq 2014$ …………………………………1p
- Pentru $m=2$ se obține că $r=2$, $a_1=4$ pentru oricare $p \in N^*$, deci $a_n=2n+2$. Cum $2n+2=2014$ are soluție rezultă că 2014 este termen al progresiei. Egalitatea este verificată pentru oricare $p \in N^*$, și, astfel, $A=N^*$ ($a_n=2n+2$ verifică relația $a_{2p+2}=a_p+a_{p+1}$ pentru orice $p \in N^*$).
  ………………………………………………………………………………….2p

3. a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul CPQ și în triunghiul ADB. Se obține că $PQ=2MN=BD$ și $PQ \parallel MN \parallel BD$, deci patrulaterul $BDQP$ este paralelogram și astfel vectorii $\overrightarrow{BP}$ și $\overrightarrow{DQ}$ sunt egali……………………………………………..3p

b) $\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CA}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ deci $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ și $ABCD$ este paralelogram……………………………………………………………………….2p

c) Notăm cu G mijlocul lui $[MN]$.Dacă $ABCD$ este paralelogram, A,G,E,C coliniare, C,G,F coliniare, deci $E,A,F \in CG$ și C,A,E,F coliniare (aliniate pe mediana triunghiului CPQ)…………………………………………………….1p

Dacă $ABCD$ nu este paralelogram, se observă ușor că A, G, E sunt pe mediana din A în triunghiul ADB și deci $[AG] \equiv [GE]$. De asemenea $[GF] \equiv [GC]$, $[MN]$ fiind linie mijlocie și $[CF]$ mediană în CPQ.
Se obține că patrulaterul $CAFE$ este paralelogram…………………………………1p



4. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(1 - \frac{1}{1+k}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{1+k}\left(k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ..4p
Deci $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD}$, $\frac{1}{1+k} \neq 1$, de unde rezultă A, D, E coliniare ……………………………………………………………………………………3p