

OLIMPIADA NATIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA a -X-a

21 februarie 2016

1. a) Arătați că numărul  $\log_{2015}2016$  este număr irațional;  
b) Comparați numerele  $\log_5 6$  și  $\log_6 7$  ;  
c) Calculați  $E = \lg^3 5 + \lg^3 20 + \lg 8 \cdot \lg(0,25)$ .
2. Determinați valorile lui  $x \in Z$  pentru care  $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x + 29} \in Q$ .
3. Fie  $a, b, c$  numere complexe astfel încât  $|a - 1| = |b - 2| = |c + 3|$  și  $a + b + c = 0$ .  
Arătați că  $|a - b + 1| = |a - c - 4| = |b - c - 5|$ .
4. a) Fie  $A$  o mulțime finită, nevidă și  $f: A \rightarrow A$  o funcție injectivă. Arătați că  $f$  este surjectivă.  
b) Fie  $f: \{1, 2, 3, \dots, 63\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 63\}$  o funcție astfel încât  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(63) - 1 = 2016$ . Arătați că  $f$  nu este injectivă.

Notă-Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt notate cu 7 puncte