OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

CLASA a XI-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\det\ I_2+AB\ =\det\ I_2+BA\ ,\ \forall A,B\in M_2\ \mathbb{C}\ .$

b) Fie $A\in M_2\ \mathbb{C}$ astfel încât $A^{2013}=O_2$, demonstraț i că

$\det\ I_2+AXA\ =1,\ \forall X\in M_2\ \mathbb{C}\ .$

Prof.Mihai Piticari

Problema 2.

Fie A,B,C trei matrice patratice de ordin n cu elemente reale astfel incat $BA+BC+AC=I_n$ si det(A+B)=0. Sa se arate ca:

$$\det(A+B+C-BAC)=0.$$

G,M. 10/2012

Problema 3.

Fie sirul de numere reale $x_n\ \ _{n\geq 0}$ definit prin

$$x_0=a$$

$$x_{n+1}=x_n{}^2-3x_n+4,\forall n\geq 0.$$

Studiati convergenta sirului in functie de $a\in\mathbb{R}$ si determinati limita sirului.

Manual Stănăşilă

Problema 4.

Se considera functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin

$$f\ \ x\ =\ \ x\ +\ \ 2x\ +\ldots+\ \ 2013x\ ,$$

unde a reprezinta partea fractionara a lui a.

Sa se determine supremumul functiei f.

Prof.Mihai Piticari

Subiect selectat de Inspector de specialitate, prof. Liviu Vlădescu

NOTA:Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7.

BAREM CLASA a XI-a

Problema1.

a)Se poate verifica prin calcul direct.(3p)

b) $A^{2013}=0_2$ *implica* $A^2=0_2$.(2p) si demonstrarea cerintei folosind a) siimplicatia (2p)

Problema 2.

Prin inmultirea relatiei cu matricea C si adunarea in ambii termini ai egalitatii a matricelor A si B obtinem $A+B+C-BAC=(A+B)(I_n+C^2)$ (4p)

Aplicam determinantul acestei relatii si folosind ipoteza ,rezulta concluzia.(3p)

Problema 3.

Deoarece $f(t)=t^2-3t+4>0, \forall t\in\mathbb{R}$ atunci $x_1=f(a)>0, \forall a\in\mathbb{R}$ (1p)

Sirul este crescator,deci are limita finite s-au infinita.(2p)

Obtinem : (4x1p)

$i) x_1=2 \Rightarrow x_n=2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=2;$

$ii) x_1\in(2,\infty)$ sirul este nemarginit, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty;$

$iii) x_1\in[1,2) \Rightarrow x_n\le 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=2;$

$iv) x_1\in(0,1) \Rightarrow x_2=f(x_1)>2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty.$

Problema 4.

Deoarece $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ avem $0\le\{\alpha\}<1$, rezultă imediat că $f(x)<n,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1) (1p)

Considerăm ș irul $(x_m)_{m\ge1}$, $x_m=1-\frac{1}{m}$. Avem

$f(x_m)=\left\{1-\frac{1}{m}\right\}+\left\{2-\frac{2}{m}\right\}+\ldots+\left\{2013-\frac{2013}{m}\right\}$ (2p)

Cum $\forall k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m$ avem $\left\{k-\frac{k}{m}\right\}=\left\{1-\frac{k}{m}\right\}=1-\frac{k}{m}$, obț inem (1p)

$f(x_m)=2013-\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\ldots+\frac{2013}{m}\right)$, deci $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m)=2013.$ (2)(2p)

Din (1) ș i (2) rezultă că $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2013$.(1p)