OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a VIII- a

SUBIECTUL I (7p)

a) Să se arate că $\frac{n^2-1}{(n+1)^2}<\frac{n^2}{(n+1)^2}<\frac{n^2}{(n+1)^2-1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. **(3p)**

b) Arătați că numărul $a=\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2015}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2016} \in\left(\frac{\sqrt{2}}{45} ; \frac{\sqrt{3}}{44}\right)$. **(4p)**

SUBIECTUL 2 (7p)

a) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x, y)=x^4+y^4+\frac{2}{x^2 y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Precizați valorile lui x și y pentru care se realizează acest minim. **(4p)**

b) Determinați numerele reale x, y, z știind că: $x+y+z=\frac{3}{2}$ și $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}$. **(3p)**

(G.M. nr.10/2015)

SUBIECTUL 3 (7p)

Considerăm în spațiu punctele A, B, C, D și M,N mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD]. Demonstrați că, dacă $MN=\frac{BC+AD}{2}$, atunci punctele A, B, C, D sunt coplanare.

SUBIECTUL 4 (7p)

Fie un cub ABCDA’B’C’D’, de latură 4cm și P un punct interior cubului.

a) Demonstrați că suma distanțelor de la P la fețele cubului este constantă.

b) Demonstrați că suma distanțelor de la P la vârfurile cubului este mai mare sau egală cu $16\sqrt{3}$.

c) Dacă $P \in [BD']$ astfel încât BP=3PD’ calculați suma distanțelor la muchiile laterale AA’, BB’, CC’, DD’.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru **3 ore.**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ- **CLASA VIII**

21 februarie 2016

BAREM DE NOTARE SI CORECTARE

SUBIECTUL I (7p=3p+4p))

a) Să se arate că $\frac{n^2-1}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2-1}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că numărul $a = \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot2015}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot\ldots\cdot2016} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right)$.

Soluție:

a) Cum $(n+1)^2 > 0$, din $n^2-1 < n^2 \Rightarrow \frac{n^2-1}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2}$ .... **(1p)**

iar din $(n+1)^2 > (n+1)^2-1 \Rightarrow \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{(n+1)^2-1}$ .... **(1p)**

finalizare .... **(1p)**

b) $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{45} < a < \frac{\sqrt{3}}{44} \Rightarrow \frac{2}{2025} < a^2 < \frac{3}{1936}$ .... **(1p)**

$$a^2 = \frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2016^2} > \frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\ldots\frac{2015^2-1}{2016^2}\frac{2\cdot4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot8}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2014\cdot2016}{2016^2}$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{8}\cdot\ldots\frac{2014}{2016} = \frac{2}{2016} > \frac{2}{2025}$$ .... **(1p)**

$$a^2 = \frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2016^2} < \frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot\cdot\frac{2015^2}{2016^2-1} = \frac{3^2}{3\cdot5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot9}\cdot\ldots\cdot\frac{2015^2}{2015\cdot2017}$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2017} = \frac{3}{2017} < \frac{3}{1936}.$$ .... **(1p)**

$$\begin{cases} a^2 > \frac{2}{2025} \\ a^2 < \frac{3}{1936} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2025} < a^2 < \frac{3}{1936} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{45} < a < \frac{\sqrt{3}}{44} \Rightarrow a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{45}; \frac{\sqrt{3}}{44}\right)$$ ....**(1p)**

SUBIECTUL 2 (7p=4p +3p)

a) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Precizați valorile lui x și y pentru care se realizează acest minim.

b) Determinați numerele reale x, y, z știind că: $x + y + z = \frac{3}{2}$ **și** $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$.

(G.M. nr.10/2015)

Soluție: **a)** Aplicăm de două ori inegalitatea (MA-MG)

$$E(x) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} \geq 2\sqrt{x^4y^4} + \frac{2}{x^2y^2} = 2\left(x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \geq 2\cdot2\cdot\sqrt{x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}} = 4$$ .... **(2p)**

Cele două inegalități trebuie să devină egalități și acest lucru se întâmplă dacă pe de o parte $x^4 = y^4 \Leftrightarrow x = \pm y$, iar pe de altă parte $x^2y^2 = \frac{1}{x^2y^2} \Leftrightarrow (xy)^4 = 1 \Leftrightarrow xy = \pm 1$. ....**(1p)**

Se obțin imediat soluțiile $(x, y) \in \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$ ....**(1p)**

b) Facem substituțiile $x - \frac{1}{2} = a, y - \frac{1}{2} = b, z - \frac{1}{2} = c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Avem $a + b + c = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = (x + y + z) - \frac{3}{2} = 0$ (*) .... **(1p)**

Relația $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ devine : $\left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 + c + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, de unde rezultă ținând cont de (*) : $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$. ....**(1p)**

Deci: $x = y = z = \frac{1}{2}$......... .... **(1p)**

SUBIECTUL 3 (7p)

Considerăm în spațiu punctele A, B, C, D și M, N mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD]. Demonstrați că, dacă $MN = \frac{BC+AD}{2}$, atunci punctele A, B,C, D sunt coplanare.

Soluție : Fie E mijlocul segmentului (AC). ....**(1p)**

În $ME = \frac{BC}{2}, NE = \frac{AD}{2}$ (linii mijlocii în triunghiuri) ....**(2p)**

$ME + NE = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = MN$ .... **(1p)**

$\Rightarrow M, E, N$ coliniare ....**(1p)**

Din $ME \parallel BC, EN \parallel AD$ avem BC$\parallel AD$, deci A, B,C, D coplanare. .... **(2p)**

SUBIECTUL 4 (7p)

Fie un cub ABCDA'B'C'D', de latură 4cm și P un punct interior cubului.

a) Demonstrați că suma distanțelor de la P la fețele cubului este constantă.

b) Demonstrați că suma distanțelor de la P la vârfurile cubului este mai mare sau egală cu $16\sqrt{3}$.

c) Dacă $P \in [BD']$ astfel încât BP=3PD' calculați suma distanțelor la muchiile laterale AA', BB', CC', DD'.

Soluție:

a)Distanțele la 2 fețe opuse sunt x și 4-x, deci suma este 3·4=12 .... **(2p)**

b)Suma distanțelor la 2 vârfuri diagonal opuse este mai mare decât lungimea diagonalei ....**(1p)**

Avem 4 perechi de vârfuri deci suma este $4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.. **(1p)**

c)Pentru simplitate se proiectează punctual P pe o bază .... **(1p)**

Calculul sumei .... **(2p)**