Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A -XII-A

21 februarie 2016

1. Să se determine:

a) $\int arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx,\ \ x>0.$ b) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{x^3+1}dx,\ \ x\in\mathbb{R}.$ c) $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2016}}{e^x+1}dx.$

2. a) Să se arate că șirul $a_n=\int_0^n e^{-x^2}dx,\ \ n\in\mathbb{N}$, este convergent.

b) Dacă $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ este o funcție continuă cu $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,$ rezultă în mod necesar că șirul $x_n=\int_0^n f(x)dx,\ \ n\in\mathbb{N}$, este convergent? Justificare.

3. Fie mulțimea $G=(-k,k),\ k>0$ și $x*y=\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy},\ \ x,y\in G.$ Arătați că:

a) $(G,*)$ este grup abelian.

b) $\frac{k}{3}*\frac{k}{5}*\cdots*\frac{k}{2n+1}<\frac{k}{2}*\frac{k}{4}*\cdots*\frac{k}{2n},\ \ n\in\mathbb{N}^*.$ (*Supliment G.M. nr. 10/2015*)

4. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel (unitar) comutativ și $U(A)$ mulțimea elementelor inversabile ale inelului.

a) Dacă $x\in A$ și $x^2=0$ să se arate că $1+x\in U(A).$

b) Fie $x\in A$ pentru care există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n=0$ și fie $u\in U(A).$ Să se arate că $u+x\in U(A).$

Notă. Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.