OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Arătați că numerele $\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{7}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

Subiectul 2

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația : $\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{[x]}$,

unde $\{x\}$ reprezintă partea fractionara a lui x si $[x]$ reprezintă partea întreaga a lui x.

Subiectul 3

Se consideră în interiorul unui triunghi ascuțitunghic ABC un punct M. Bisectoarele interioare ale unghiurilor <BMC , <AMC , <AMB intersectează laturile BC , AC , respectiv AB în punctele D , E , F . Demonstrați că dreptele AD , BE , CF sunt concurente .

Subiectul 4

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM , BCN și CAP cu centrele C_1 , A_1 , respectiv B_1. Notăm cu G , G' , G'' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , $A_1B_1C_1$, respectiv MNP. Să se arate că $\overrightarrow{G'G''}=2\overrightarrow{GG'}$

G.M. nr. 5 /2015

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Tiberiu Oprea – C.N. „Al. I. Cuza” Focșani
Prof. Marian Cucoaneș – Lic. Teh. „E. Grigorescu” Mărășești

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a IX-a

Soluții cu barem

Subiectul 1

Arătați că numerele $\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{7}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

Soluție

Fie $(a_n)_n$ progresie aritmetică de rație r

$a_m=\sqrt{2}$

$a_n=\sqrt{5}$

$a_p=\sqrt{7}$ $m, n, p\in\mathbb{N},\ m\neq n\neq p\neq m$

$\sqrt{5}=\sqrt{2}+(n-m)r$ 4p.

$\sqrt{7}=\sqrt{2}+(p-m)r\ \Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{n-m}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{p-m}\Rightarrow$

$\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{7}(n-m)-\sqrt{5}(p-m)}{n-m}$ 1p.

$2=\dfrac{7(n-m)^2+5(p-m)^2-2\sqrt{35}(n-m)(p-m)}{(m-p)^2}$

2p.

$\sqrt{35}=\dfrac{7(n-m)^2+5(p-m)^2-2(m-p)^2}{2(n-m)(p-m)}\in\mathbb{Q}$ *Fals*

$\Rightarrow\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{7}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

Subiectul 2

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația : $\dfrac{1}{\{x\}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{[x]}$,

unde $\{x\}$ reprezintă partea fractionara a lui x si $[x]$ reprezintă partea întreaga a lui x.

Soluție

Dacă x<0 $\Rightarrow\dfrac{1}{\{x\}}>0$ si $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{[x]}<0$ 2p.

Dacă x>2 $\Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{[x]}<1$ si $\frac{1}{\{x\}}>1$ 2p.

$x \in (1;2) \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+1$ 2p.

$x^2-x-1=0$, $x \in (1;2) \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 1p.

Subiectul 3

Se consideră în interiorul unui triunghi ascuțitunghic ABC un punct M. Bisectoarele interioare ale unghiurilor <BMC , <AMC , <AMB intersectează laturile BC , AC , respectiv AB în punctele D , E , F . Demonstrați că dreptele AD , BE , CF sunt concurente .

Soluție

Teorema bisectoarei în triunghiurile BMC , AMC , AMB

$\frac{BD}{DC}=\frac{BM}{MC}$, $\frac{CE}{AE}=\frac{MC}{MA}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{AM}{MB}$ 3p.

$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{AE}\frac{AF}{FB}=\frac{BM}{MC}\frac{MC}{MA}\frac{AM}{MB}=1$ 2p.

Reciproca teorema lui Ceva $\Rightarrow$ AD , BE , CF sunt concurente. 2p.

Subiectul 4

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM , BCN și CAP cu centrele C_1 , A_1 , respectiv B_1. Notăm cu G , G′ , G″ centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , $A_1B_1C_1$, respectiv MNP. Să se arate că $\overrightarrow{G'G''}=2\overrightarrow{GG'}$

Soluție

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 2p.

$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GP}\right)=$ 4p.

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}\right)=\overrightarrow{GG''}$

$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GG''} \Rightarrow \overrightarrow{G'G''}=2\overrightarrow{GG'}$ 1p.

NOTĂ. Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.