Barem de notare – clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvați în ***R*** ecuația:

$$\left[\frac{4x+1}{6}\right] = \left\{\frac{2x-1}{3}\right\} + x.$$

<u>Soluție:</u>

$\left\{\frac{2x-1}{3}\right\} = \frac{2x-1}{3} - \left[\frac{2x-1}{3}\right]$

1p

Ecuația devine $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = x + \frac{2x-1}{3}$

Conform identității lui Hermite $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \left[2 \cdot \frac{2x-1}{3}\right] \Rightarrow \left[\frac{4x-2}{3}\right] = \frac{5x-1}{3}$ **2p**

Fie $k \in Z, k = \left[\frac{4x-2}{3}\right] \Rightarrow x = \frac{3k+1}{5}$

1p

$\left.\begin{array}{l} k \le \frac{(4x-2)}{3} < k+1 \Leftrightarrow \quad k \in (-7,-2] \\ k \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow k \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$

2p

$\Rightarrow x \in \left\{\frac{-17}{5}, \frac{-14}{5}, \frac{-11}{5}, \frac{-8}{5}, -1\right\}$

1p.

Problema 2. Determinați perimetrul triunghiului neechilateral ABC știind că

$$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = (4p - b - c) \cdot \overrightarrow{AI} + (4p - c - a) \cdot \overrightarrow{BI} + (4p - a - b) \cdot \overrightarrow{CI},$$

unde G este centrul de greutate al ΔABC, I este centrul cercului înscris în ΔABC iar *p* semiperimetrul ΔABC.

Soluţie:

$4p - b - c = 2p + a, 4p - c - a = 2p + b, 4p - a - b = 2p + c$
Relația din enunț devine :
$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = a \cdot \overrightarrow{AI} + b \cdot \overrightarrow{BI} + c \cdot \overrightarrow{CI} + 2p(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$
1p
$\overrightarrow{AI} = \frac{b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}}{a+b+c}, \overrightarrow{BI} = \frac{c\cdot\overrightarrow{BC}+a\cdot\overrightarrow{BA}}{a+b+c}, \overrightarrow{CI} = \frac{a\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{CB}}{a+b+c} \Rightarrow$

$a \cdot \overrightarrow{AI} + b \cdot \overrightarrow{BI} + c \cdot \overrightarrow{CI} = \vec{0}$
3p
Conform relației Leibniz
$3\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} \Rightarrow$

1p
$p^2 \cdot \overrightarrow{GI} = 6p \cdot \overrightarrow{GI} \Leftrightarrow (p^2 - 6p) \cdot \overrightarrow{GI} = \vec{0}$

ΔABC neechilateral$\Rightarrow G \neq I \Rightarrow (p^2 - 6p) = 0 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 12.$
2p

Problema 3. Numerele reale *a,b,c* verifică: $a+b+c=6$ şi $a^3+b^3+c^3=36$. Să se arate că $abc<12$.

Soluţie:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \Leftrightarrow$
2p

$$36-3abc=6(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \Leftrightarrow$$
$12-abc=(a-b)^2+(c-b)^2+(a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow 12 \geq abc$

3p

Relația are loc cu egalitate dacă și numai dacă *a*=*b*=*c*. În acest caz se obține $a=2$ *și* $a^3=12$ contradicție. Deci $abc<12$ $(\mathbf{2p})$.

Problema 4. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale cu proprietatea că pentru orice $m,n\in N, m\geq n$,

$2(a_{m+n}+a_{m-n})=a_{2m}+a_{2n}$ și $a_1=1$. Determinați o formulă pentru termenul general al șirului $(a_n)_{n\in N}$.

Soluție:

$m=n=0 \Rightarrow a_0=0$

$m=1, n=0 \Rightarrow a_2=4$
1p

$m=n+2 \Rightarrow 2(a_{2n+2}+a_2)=a_{2n+4}+a_{2n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_{2n+2}+8=a_{2n+4}+a_{2n}$
1p

$n=0 \Rightarrow 4a_m=a_{2m}$

$8a_{n+1}+8=4a_{n+2}+4a_n \Rightarrow$
$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$
2p

Fie $b_n=a_{n+1}-a_n \Rightarrow (b_n)$ progresie aritmetică, $b_1=3, r=2 \Rightarrow b_n=2n+1 \Rightarrow$
1p

$a_{n+1}-a_n=2n+1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) \Rightarrow$

$a_n-a_0=n(n-1)+n \Rightarrow a_n=n^2, \forall n\in N.$ **(2p)**