OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a X-a

1. (7p) Să se determine mulțimea numerelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care se verifică inegalitatea $(\sqrt{x})^x \leq x^{\sqrt{x}}$.

***

Soluție:
Cum $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ dacă și numai dacă $0 \leq x$, iar 0^0 nu are semnificație matematică, mulțimea căutată este inclusă în $(0,\infty)$.
Utilizând logaritmul natural, inegalitate este echivalentă cu

$ln(\sqrt{x})^x \leq ln(x^{\sqrt{x}})$ sau cu $xln\sqrt{x} \leq (\sqrt{x})lnx$.

De asemenea, ultima inegalitate se echivalează cu

$\frac{x}{2}lnx \leq (\sqrt{x})lnx$ sau cu $(\sqrt{x})lnx \leq 2lnx$.

Se impune tratarea ultimei inegalități pe cazuri:
Cum $\{1\}$ este submulțime a mulțimii solicitate de enunț, se mai analizează:

Cazul $x \in (0,1)$, care conduce $\sqrt{x} \geq 2$.

Cazul $x \in (1,\infty)$, care mai impune $\sqrt{x} \leq 2$ sau $x \leq 4$.

În concluzie, răspunsul la exercițiu este $x \in [1,4]$.

Barem:

Stabilirea domeniului de referință $(0,\infty)$ și obținerea unei inegalități echivalente cu $(\sqrt{x})lnx \leq 2lnx$.	**2 p**
Analiza celor două cazuri, câte două puncte pentru fiecare caz	**4 p**
Finalizare	**1 p**

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{10x-3}$.

a) (3p) Să se demonstreze că f este funcție inversabilă.

b) (2p) Să se determine inversa funcției f.

c) (2p) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^3 + 3 = 10\sqrt[3]{10x-3}$.

Prelucrare, problema S:L23.257, Gazeta Matematică B 10-2023, *Flavius Nisipeanu*

Soluție:
a) Pentru oricare număr real y, există un număr real $x = \frac{y^3+3}{10}$, astfel ca $f(x) = y$, argument necesar şi suficient pentru surjectivitatea funcţiei f, explicitată analitic în enunţ.
Cum soluţia ecuaţiei $f(x) = y$, $x = \frac{y^3+3}{10}$ este unică, se asigură şi injectivitatea funcţiei, astfel că, f este funcţie inversabilă.
b) Rădăcina unică a ecuaţiei $f(x) = y$ de la punctul precedent oferă şi explicitarea funcţiei inverse $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{10}$.
c) Se observă că ecuaţia din enunţ se scrie $f(x) = f^{-1}(x)$, care are mulţimea soluţiior aceeaşi cu cea a soluţiilor ecuaţiei $f(x) = x$.
În adevăr, din $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, decurge $f \circ f$=$1_{\mathbb{R}}$, iar cu ipoteza f monoton strict crescătoare şi din $f \circ f$=$1_{\mathbb{R}}$, adică $f = f^{-1}$, rezultă $f(x) = x$.

(altfel, $f(x) > x$ implică $f(f(x)) > f(x) > x$ şi $f(x) < x$ implică $f(f(x)) < f(x) < x$).
Atunci $f(x) = x$ se echivalează cu $x^3 - 10x + 3 = 0$, adică
$x^3 - 10x + 3 = x^3 - 9x - (x - 3) = (x - 3)(x^2 + 3x - 1)$,
de unde se deduce mulţimea celor trei soluţii ale ecuaţiei: 3 şi $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Barem:

a) Fie că utilizează caracterizarea algebrică a funcţiei bijective, fie că tratează şi justifică separat injectivitatea şi surjectivitatea	**2 p**
b) Indicarea inversei $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{10}$.	**2 p**
c) Justificarea echivalenței $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ și obținerea celor trei rădăcini	**3 p**

3. Se consideră numărul $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ şi funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel ca
$$(f \circ f)(x) = af(x) + (1 - a^2)x, \forall x \in \mathbb{R}.$$
a) (3p) Să se demonstreze că f este funcţie injectivă.
b) (4p) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție:

a) Dacă $f(u) = f(v)$, atunci
$(f \circ f)(u) = (f \circ f)(v)$ și $(1 - a^2)u = (f \circ f)(u) - af(u) = (f \circ f)(v) - af(v) = (1 - a^2)v$
adică $u = v$.
b) În enunţ, luând $x = f(0)$, rezultă $f(f(f(0))) = af(f(0)) + (1 - a^2)f(0) = a(af(0)) = f(0)$.
Tot în relaţia enunţului, se aplică f şi se deduce
$f\big((f \circ f)(x)\big) = f(af(x) + (1 - a^2)x), \forall x \in \mathbb{R}$,
iar pentru $x = 0$, reiese că $f(f(f(0))) = f\big(af(0)\big) = f(0)$,
de unde $x = 0$ este singura soluţie reală a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Barem

a) Dacă $f(u) = f(v)$, atunci $f(f(u)) = f(f(v))$. Concluzia din $(1 - a^2)u == (1 - a^2)v$, $\lvert a\rvert \neq 1$.	**1 p** **2 p**
b) Alegerea $x = 0$ şi exprimarea numărului $f(f(f(0)))$ în două moduri.	**2 p**
Finalizare cu soluţia unică $x = 0$.	**2 p**

4. Pentru fiecare număr complex nenul z, se consideră mulțimea
$$A(z) = \{z^0 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
a) (3p) Să se determine mulțimile $A(1)$, $A(-1)$ şi $A(i)$.
b) (4p) Câte numere complexe z au proprietatea că $A(z)$ are exact 2024 elemente?

Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție:
a)Evident, $A(z) = \left\{ 1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+z^2+\ldots+z^n, \ldots \right\}$.

Pentru $z = 1$, $z^0 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = 1 + n$, adică $A(1) = \mathbb{N}^*$.

Pentru $z = -1$, $z^0 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n \text{ par}, \\ 0, & \text{pentru } n \text{ impar}. \end{cases}$

Atunci $A(-1)=\{1;\ 0\}$.

Pentru $z=i$, $z^0+z^1+z^2+\ldots+z^n=\begin{cases}1, & \text{pentru } n=4k,\\ 1+i, & \text{pentru } n=4k+1,\\ i, & \text{pentru } n=4k+2,\\ 0, & \text{pentru } n=4k+3.\end{cases}$

Astfel, $A(i)=\{1,\ 1+i,\ i,\ 0\}$.

b) Cum $A(z)$ este finită cu 2024 elemente, rezultă că $z\neq\pm1$ și

există $r,s\in\mathbb{N}$ cu $r+2<s$ $(z\neq\pm1)$, astfel ca $1+z+z^2+\ldots+z^s=1+z+z^2+\ldots+z^r$, de unde $1+z+z^2+\cdots+z^{s-r-1}=0$.

Multiplicând cu cu $1-z\neq0$, se obține $z^{s-r}=1$, adică există $m\in\mathbb{N}, m\geq3$, astfel încât $z^m=1$.

Fie $m_0\geq3$ cel mai mic număr natural cu $z^{m_0}=1$.

Atunci $1+z+z^2+\ldots+z^{m_0-1}=0$.

Se demonstrează că $A(z)=\left\{1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\ldots+z^{m_0-1}\right\}$ și atunci $|A(z)|=m_0$.

Într-adevăr, pentru $n\geq m_0$, grupând termenii câte m_0, se obține $z^0+z^1+z^2+\ldots+z^n=1+z+z^2+\ldots+z^r$ unde r este restul împărțirii lui n la m_0.

Pentru $0\leq r<s<m_0$ avem $z^0+z^1+z^2+\ldots+z^s\neq z^0+z^1+z^2+\ldots+z^r$ (contrar, se deduce $z^{s-r}=1$, ceea ce contrazice minimalitate lui m_0).

În concluzie, $|A(z)|=2024 \Leftrightarrow z^{2024}=1$ și $z^k\neq1$ pentru $k\in\{1,2,\ldots,2023\}$. Altfel spus, z este rădăcină primitivă de ordinul 2024 a unității, iar numărul rădăcinilor primitive de ordin 2024 ale unității este $\varphi(2024)$, unde φ este indicatorul lui L. Euler.

Cum $2024=2^3\cdot11\cdot23$, rezultă $\varphi(2024)=2024\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{23}\right)=880$.

Barem:

a) Se acordă câte un punct pentru fiecare mulțime $A(1)$, $A(-1)$ și $A(i)$.	**3 p**
b) Justificare existenței numărului $m\in\mathbb{N}, m\geq3$, astfel încât $z^m=1$.	**2 p**
Finalizarea cu utilizarea indicatorului Euler.	**2 p**

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**