Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M$_2$

Problema 1

Fie $M = (0, \infty)$ și $a, b \in M$. Definim legea de compoziție $a \circ b = \ln\left(e^a + e^b - 1\right)$.

a) Să se arate că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $\circ$.

b) Arătați că legea $\circ$ este asociativă.

Problema 2

Fie. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R},\ 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$

Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

Problema 3

Fie$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați I_1 și I_2.

b) Arătați că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Problema 4

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & , x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b & , x > 1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) Aflați funcția f.

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.