OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale nenule a, b, c, x, y, z astfel încât $bcx + acy - abz = 0$ și $(a,b)=1, (b,c)=1, (c,a)=1$. Arătați că $a^2b^2c^2$ divide $(x^2+a^2)\cdot(y^2+b^2)\cdot(z^2+c^2)$.

2. Numerele $x+y,\ y+z,\ z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 8.

a) Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

b) Dacă $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}, a \neq b \neq c \neq a$, să se determine valorile maxime și minime ale raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.

3. Fie unghiul $\measuredangle XOY$ și numerele naturale distincte a, b. Pe $(OX$ considerăm în ordine punctele $A_1, A_2, A_3, \dots$ astfel încât $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = a$. Pe $(OY$ considerăm în ordine punctele $B_1, B_2, B_3, \dots$ astfel încât $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = b$.

a) Arătați că există $A \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots\}$ și $B \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, \dots\}$ astfel încât triunghiul OAB este isoscel.

b) Arătați că există $A, C \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots\}$ și $B, D \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, \dots\}$ astfel încât $\Delta OAD \equiv \Delta OBC$.

4. Pe dreapta d, se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F în această ordine, astfel încât $AB = 2OA$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[BD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ şi E este mijlocul lui $[BF]$.
Să se arate că:

a) segmentele ($[AE], [CD]$), respectiv ($[AD], [BC]$) au acelaşi mijloc;

b) $\frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} > \frac{CF}{OE}$.

Notă

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).*
- *Timp de lucru: 2 ore*

Soluţii clasa a VI-a:

1. Din $bcx = a \cdot (bz - cy)$ rezultă a / bcx și cum $(a,b)=1,(a,c)=1$ obținem $a / x \Leftrightarrow x = a \cdot a_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Din $acy = b \cdot (az - cx)$ rezultă b / acy și cum $(a,b)=1,(b,c)=1$ obținem $b / y \Leftrightarrow y = b \cdot b_1, b_1 \in \mathbb{N}^*$.

Din $abz = c \cdot (bx + ay)$ rezultă c / abz și cum $(a,c)=1,(b,c)=1$ obținem $c / z \Leftrightarrow z = c \cdot c_1, c_1 \in \mathbb{N}^*$.

Avem: $(x^2+a^2)\cdot(y^2+b^2)\cdot(z^2+c^2) = (a^2a_1^2+a^2)\cdot(b^2b_1^2+b^2)\cdot(c^2c_1^2+c^2) =$

$= a^2b^2c^2 \cdot (a_1^2+1)\cdot(b_1^2+1)\cdot(c_1^2+1)$

care se divide prin $a^2b^2c^2$.

2. a) Avem $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k$, de unde rezultă că:
$x + y = 4k$, $y + z = 6k$ și $z + x = 8k$, iar prin adunare membru cu membru a celor trei egalități obținem:

$2x + 2y + 2z = 18k$, deci $x + y + z = 9k$.

Dacă $x + y + z = 9k$ și $x + y = 4k$, rezultă că $z = 5k$.

Dacă $x + y + z = 9k$ și $y + z = 6k$, rezultă că $x = 3k$.

Dacă $x + y + z = 9k$ și $z + x = 8k$, rezultă că $y = k$.

Se obține: $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2} = \frac{23}{35}$.

b) Valoarea maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când

$b = 9, c = 8, a = 7$

(deoarece $xz > yz > xy$) și este $\frac{7\cdot 3k^2+9\cdot 15k^2+8\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$.

Valoarea minimă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când $b = 1, c = 2, a = 3$ (deoarece $xz > yz > xy$) și este

$$\frac{3\cdot 3k^2+1\cdot 15k^2+2\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{34}{35}.$$

3. a) Căutăm $A \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\}$ și $B \in \{B_1, B_2, B_3, B_4, ...\}$, astfel încât $OA = OB \Leftrightarrow OA_i = OB_k \Leftrightarrow i \cdot a = k \cdot b$. Luăm $i = b$ și $k = a$. Rezultă $OA = OB = a \cdot b$.

b) Cu A și B fixate ca la a), e suficient să luăm de exemplu $C \in (OX$, astfel încât $OC = 2 \cdot OA$ și $D \in (OY$, astfel încât $OD = 2 \cdot OB$. Rezultă $\Delta OAD \equiv \Delta OBC\, (L.U.L)$.

4. Se notează cu $OA = a$.

- Din $AB = 2OA$ se obține $AB = 2a, OB = OA + AB = 3a$;
- B este mijlocul lui $[AC] \Rightarrow OC = 5a$;
- C este mijlocul lui $[BD] \Rightarrow OD = 7a$;

- D este mijlocul lui $[BE] \Longrightarrow OE = 11a$;
- E este mijlocul lui $[BF] \Longrightarrow OF = 19a$.

a) 1. Segmentele ($[AE],[CD]$) au acelaşi mijloc dacă $AC = DE \Leftrightarrow$
$AC = OC - OA = 4a$;
$DE = OE - OD = 4a$
Deci ($[AE],[CD]$) au acelaşi mijloc.

2. Segmentele ($[AD],[BC]$) au acelaşi mijloc dacă $AB = CD \Leftrightarrow$
$AB = OB - OA = 2a$
$CD = OD - OC$
Deci ($[AD],[BC]$) au acelaşi mijloc.

b) $\frac{AC}{BE}+\frac{AB}{AD}+\frac{BC}{EF}+\frac{OA}{DE}>\frac{CF}{OE} \Leftrightarrow \frac{OC-OA}{OE-OB}+\frac{OB-OA}{OD-OA}+\frac{OC-OB}{OF-OE}+\frac{OA}{OE-OD}>\frac{OF-OC}{OE} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5a-a}{11a-3a}+\frac{3a-a}{7a-a}+\frac{5a-3a}{19a-11a}+\frac{a}{11a-7a}>\frac{19a-5a}{11a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a}{8a}+\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{8a}+\frac{a}{4a}>\frac{14a}{11a} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{14}{11} \Leftrightarrow \frac{4}{3}>\frac{14}{11} \Leftrightarrow$$

$44 > 42.$

Barem de corectare

Clasa a VI-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
$bcx = a\cdot(bz - cy), (a,b)=1, (a,c)=1 \Rightarrow x = a\cdot a_1, a_1 \in N^*$	2p
$acy = b\cdot(az - cx), (a,b)=1, (b,c)=1 \Rightarrow y = b\cdot b_1, b_1 \in N^*$	2p
$abz = c\cdot(bx + ay), (a,c)=1, (b,c)=1 \Rightarrow z = c\cdot c_1, c_1 \in N^*$	2p
$(x^2+a^2)(y^2+b^2)(z^2+c^2) = a^2b^2c^2\cdot(a_1^2+1)\cdot(b_1^2+1)\cdot(c_1^2+1)$	2p
Finalizare: $a^2b^2c^2$ divide $(x^2+a^2)\cdot(y^2+b^2)\cdot(z^2+c^2)$	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
a) Scrie condiția de proporționalitate directă: $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k$	1p
$x + y + z = 9k.$	1p
Determinare $x = 3k, y = k, z = 5k$	2p
Finalizare: $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2} = \frac{23}{35}$.	1p
b) Valoarea maximă a raportului se realizează pentru $b = 9, c = 8, a = 7$ (deoarece $xz > yz > xy$)	1p
Calculează valoarea maximă: $\frac{7\cdot 3k^2+9\cdot 15k^2+8\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$.	1p
Valoarea minimă a raportului se realizează pentru $b = 1, c = 2, a = 3$ (deoarece $xz > yz > xy$)	1p
Calculează valoarea minimă: $\frac{3\cdot 3k^2+1\cdot 15k^2+2\cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{34}{35}$.	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
a) $OA = OB \Leftrightarrow OA_i = OB_k \Leftrightarrow i \cdot a = k \cdot b.$	3p
Luăm $i = b$ şi $k = a$. Rezultă $OA = OB = a \cdot b$	2 p
b) $C \in (OX$, $OC = 2 \cdot OA$	1p
$D \in (OY$, $OD = 2 \cdot OB$	1p
Finalizare: $\Delta OAD \equiv \Delta OBC\left(L.U.L\right)$.	2p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
Determinare OB, OC, OD, OE, OF	2p
a) Determinare ($[AE], [CD]$) au acelaşi mijloc	2p
Determinare ($[AD], [BC]$) au acelaşi mijloc	2p
b) $\frac{OC-OA}{OE-OB} + \frac{OB-OA}{OD-OA} + \frac{OC-OB}{OF-OE} + \frac{OA}{OE-OD} > \frac{OF-OC}{OE}$	1p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**