OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

15 februarie 2015

CLASA a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi A, B două submulţimi nevide ale lui G. Considerăm mulţimea

$A/B=\{ab^{-1} \mid a\in A,\ b\in B\}$ (am notat cu b^{-1} simetricul lui b în grupul G).

a) **(3p)** Dacă G este grup abelian iar A şi B sunt subgrupuri ale sale, demonstraţi că A/B este subgrup în G.

b) **(4p)** În grupul $(\mathbb{Z}_{2015},+)$ considerăm mulţimile $A=\{\hat{a}\in\mathbb{Z}_{2015} \mid a \text{ se divide cu } 13\}$ şi $B=\{\hat{b}\in\mathbb{Z}_{2015} \mid b \text{ se divide cu } 31\}$. Determinaţi mulţimea A/B.

2. Demonstraţi că nu există grupuri necomutative $(G,\cdot)$ cu proprietatea că $x^2=e,\ \forall x\in G\setminus Z(G)$.

(Am notat cu e elementul neutru al grupului G şi cu $Z(G)$ centrul grupului G, adică mulţimea elementelor din G care comută cu **toate** elementele lui G: $Z(G)=\{x\in G \mid xy=yx,\ \forall y\in G\}$)

3. a) **(2p)** Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $(f(x))^5+f(x)-x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci funcţia f admite primitive.

b) **(5p)** Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $(f(x))^3-3(f(x))^2-x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ atunci funcţia f nu admite primitive.

4. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă , cu $0\le f'(x)\le 1, \forall x\in[a,b]$ şi $f(a)=0$.

Arătaţi că $3\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^3 \ge \int_a^b f^8(x)\,dx$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.