Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a VI- a

Subiecte :

1. Numerele naturale nenule x și y verifică relația $2x = 7y$.
   a) Să se determine x și y știind că produsul lor este 2016.
   b) Să se determine x și y știind că au cel mai mare divizor comun egal cu 11.

2. a) Fie a un număr natural nenul, $a < 2016$. Arătați că dacă numerele a și 2016 sunt prime între ele, atunci numerele 2016 și $2016 - a$ sunt prime între ele.
   b) Arătați că mulțimea $A = \left\{\frac{1}{2016}, \frac{2}{2016}, \frac{3}{2016}, \ldots, \frac{2015}{2016}\right\}$ conține un număr par de fracții ireductibile.

3. Fie A , O, B puncte coliniare, $O \in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB se duc semidreptele $[OC$ și $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = 50°$, $m(\sphericalangle COD) = 90°$.
   Dacă $[OX$ și $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$, respectiv $\sphericalangle BOC$, să se determine măsura unghiului $\sphericalangle XOY$.

4. Pe semidreapta $[OX$ se consideră punctele A, B, C, D, E, F astfel încât $A \in (OB), B \in (AC)$, $C \in (BD)$, $D \in (CE), E \in (DF)$ *și* $OA = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 14$ cm, $DE = 18$ cm , $EF = 22$ cm.
   a) Dacă N este un punct al semidreptei $[OX$ și $ON = 42$ cm, arătați că $N \in (DE)$.
   b) Determinați lungimea segmentului $[MP]$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$ și P este mijlocul segmentului $[BF]$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 2 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem cls. a VI-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1.
a) Deoarece $2|7y$ rezultă $2|y,\ y = 2k$, apoi $x = 7k, k \in \mathbb{N}^*$ și $xy = 14k^2 = 2016$………….. 3 p
$k^2 = 144, k = 12, x = 84, y = 24$…………………………………………………………...1 p
b) Deoarece $x = 7k$, $y = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = k$, rezultă $k = 11, x = 77, y = 22$……… 3 p

2. a) Dacă $d|2016$ și $d|2016 - a$ rezultă $d|2016 - (2016 - a)$, deci $d|2016$ și $d|a$, iar a și 2016 prime între ele, de unde rezultă cerința………………………………………………………4 p

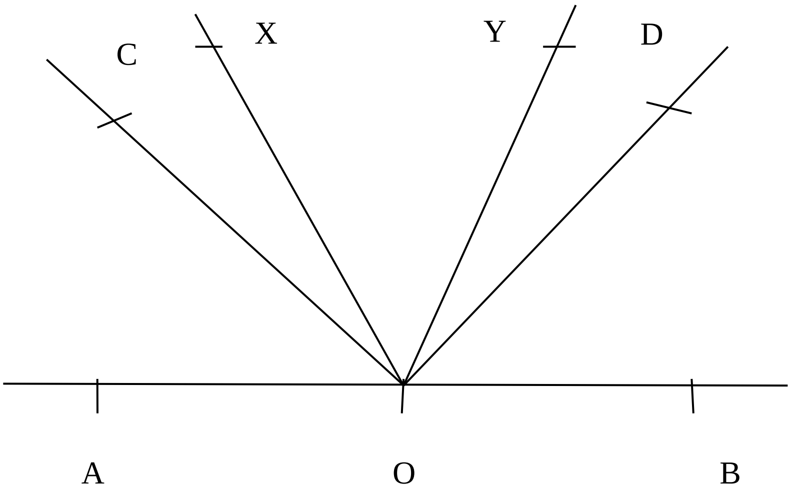
b) Dacă $1 \leq a \leq 2015$ și $\frac{a}{2016}$ este fracție ireductibilă, din punctul a) va rezulta că și $\frac{2016-a}{2016}$ este fracție ireductibilă……………………………………………………………..2 p
Dacă $\frac{a}{2016} = \frac{2016-a}{2016}$ ar rezulta $a = 1008$, iar fracția $\frac{1008}{2016}$ nu este ireductibilă .
Deci fracțiile ireductibile din A se pot grupa în perechi de forma $\left(\frac{a}{2016}, \frac{2016-a}{2016}\right)$, cu $\frac{a}{2016} \neq \frac{2016-a}{2016}$, iar A conține un număr par de fracții ireductibile…………………………1 p

3. Va rezulta $m(\sphericalangle BOD) = 40°$, $m(\sphericalangle AOX) = 70°, m(\sphericalangle BOY) = 65°$……………………4 p
$m(\sphericalangle XOY) = 180° - 70° - 65° = 45°$…………………………………………………..3 p

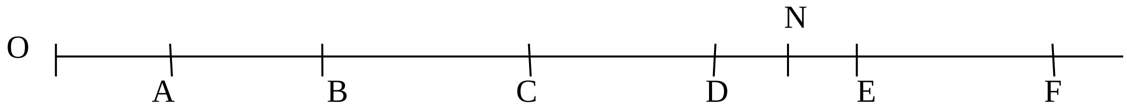
4. a) $OD = OA + AB + BC + CD = 32$ cm, $OE = OD + DE = 50$ cm , deci $OD < ON < OE$ și $N \in (DE)$……………………………………………..4p
b) $OB = 8$ cm, $OM = \frac{OA+OB}{2} = 5$ cm, $OE = 50$ cm, $OP = \frac{OB+OE}{2} = 40$ cm deci $MP = OP - OM = 35$ cm……………………………………………… 3p

Figuri geometrice

Sub. 3



Sub. 4



Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro