OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 22 februarie 2015

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Dacă $a,b>0$, să se demonstreze că $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\le\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$;

4p) b) Dacă $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$ şi $\{b_1,b_2,...,b_n\}=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, să se arate că:

$$\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{b_2}\right)...\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right)\le\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)...\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră şirul de numere pozitive $(a_n)_{n\ge 1}$ dat prin $a_1=\sqrt{34}$ şi $\sqrt{a_{n+1}^2-33}=2+\sqrt{a_n^2-2n-32}$ pentru $n\ge 1$. Dacă $x_n=\left[\frac{4\cdot 10^4}{a_n}\right]$, $(\forall)n\ge 1$ unde prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului *a*, se cere:

2p) a) Demonstraţi că $a_2=\sqrt{2^2+33}$ şi $a_3=\sqrt{3^2+33}$;

3p) b) Determinaţi formula termenului general pentru a_n;

1p) c) Aproximaţi a_{19} cu două zecimale exacte şi apoi calculaţi x_{19};

1p) d) Arătaţi că există un singur număr natural *n* pentru care $x_n=2015$.

SUBIECTUL III (7p)

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D, E, F astfel încât $BD=DE=EF=FC$ iar pe laturile (AB) şi (AC) considerăm punctele M respectiv N. Arătaţi că dreptele MD, AE şi NF sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\ne\frac{1}{2}$.

(Ion Nedelcu – Gazeta Matematică)

SUBIECTUL IV (7p)

De aceeaşi parte a dreptei AD se construiesc $\triangle ABD$ şi $\triangle ACD$ dreptunghice cu ipotenuza (AD). Dacă *G* este centrul de greutate în $\triangle ABC$, *O* este mijlocul segmentului (AD) iar *N* intersecţia dreptei *OG* cu perpendiculara din *A* pe *BC*, arătaţi că:

3p) a) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$;

2p) b) *N* este ortocentru pentru $\triangle ABC$;

2p) c) Dacă *P* este ortocentru pentru $\triangle DBC$, atunci $NPDA$ este paralelogram.

NOTĂ: Timp de lucru – **3 ore**

BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 22 februarie 2015

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I

a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{(ab+1)^2}{ab} \le \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}$ .... $(1p)$

$\Leftrightarrow a^2b^2+2ab+1 \le a^2b^2+a^2+b^2+1 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (adevărat).. $(2p)$

b) Observaţia $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} b_k$ .... $(1p)$

Inegalitatea este echivalentă cu $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k+1) \le \prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)$ .... $(1p)$

Analog ca la pct. *a)* se obţine $(a_k b_k+1)^2 \le (a_k^2+1)(b_k^2+1)$ .... $(1p)$

Înmulţirea inegalităţilor anterioare şi finalizare utilizând $\prod_{k=1}^{n}(b_k^2+1) = \prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)$ .... $(1p)$

SUBIECTUL II

a) Pentru $n=1$ în relaţia de recurenţă se obţine $\sqrt{a_2^2-33} = 2+\sqrt{a_1^2-34} = 2 \Rightarrow a_2^2-33=4$

$\Rightarrow a_2=\sqrt{37}=\sqrt{2^2+33}$ şi analog, pentru $n=2$ se obţine $\Rightarrow a_3=\sqrt{42}=\sqrt{3^2+33}$ .... $(2p)$

b) Demonstrăm prin inducţie matematică $P(n): a_n=\sqrt{n^2+33}$

$P(1): a_1=\sqrt{1^2+33}$ (adevărat).. $(1p)$

Presupunem că $a_n=\sqrt{n^2+33}$. Din relaţia de recurenţă deducem $\sqrt{a_{n+1}^2-33} = 2+\sqrt{n^2+33-2n-32}$

$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^2-33} = n+1 \Rightarrow a_{n+1}^2-33=(n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+33}$ .... $(2p)$

c) Avem $a_{19}=\sqrt{394} \approx 19,84$, $x_{19}=\left[\frac{40000}{\sqrt{394}}\right]$ şi $19,84<\sqrt{394}<19,85 \Rightarrow \frac{40000}{19,85}<\frac{40000}{\sqrt{394}}<\frac{40000}{19,84}$

$\Rightarrow 2015<\frac{40000}{\sqrt{394}}<2016 \Rightarrow x_{19}=2015$ .... $(1p)$

d) $x_n=2015 \Leftrightarrow 2015 \le \frac{40000}{\sqrt{n^2+33}} < 2016 \Leftrightarrow \frac{40000}{2016} < \sqrt{n^2+33} \le \frac{40000}{2015} \Leftrightarrow 393 < n^2+33 \le 394 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+33=394 \Leftrightarrow n=19$ .... $(1p)$

SUBIECTUL III (vezi fig.1)

Considerăm $\frac{AM}{AB}=x$ şi $\frac{AN}{AC}=y$.

"$\Rightarrow$"Notăm P punctul de concurenţă al celor trei drepte şi aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABE$ şi $\triangle ACE$ cu punctele coliniare $M-D-P$ respectiv $N-F-P$ se obţine

$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BD}{DE}\cdot\frac{EP}{PA}=\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CF}{FE}\cdot\frac{EP}{PA}=1$ .... $(2p)$

Deci $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ de unde $x=y$ .... $(1p)$

Dacă prin absurd $x=\frac{1}{2}$ atunci M este mijlocul lui (AB) iar dreptele MD, AE şi NF se obţin paralele, fals .... $(1p)$

$"\Leftarrow"$ $x = y \neq \frac{1}{2}$, deci dreptele MD şi NF intersectează dreapta AE în P respectiv T, puncte care se află în exteriorul segmentului (AE) .... $(1p)$

Folosind teorema lui Menelaus în aceleaşi triunghiuri, obţinem $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{ET}{TA} = 1$

$\Rightarrow \frac{EP}{PA} = \frac{ET}{TA} \Rightarrow T = P$ .... $(2p)$

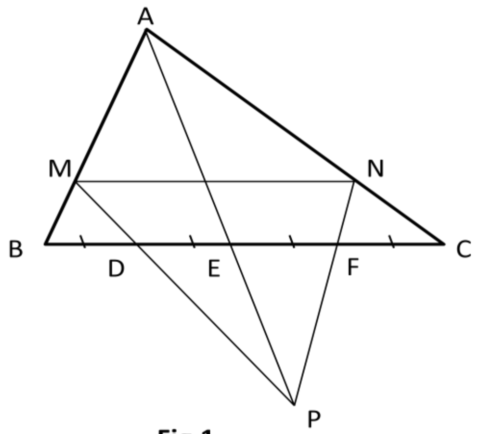

Fig.1

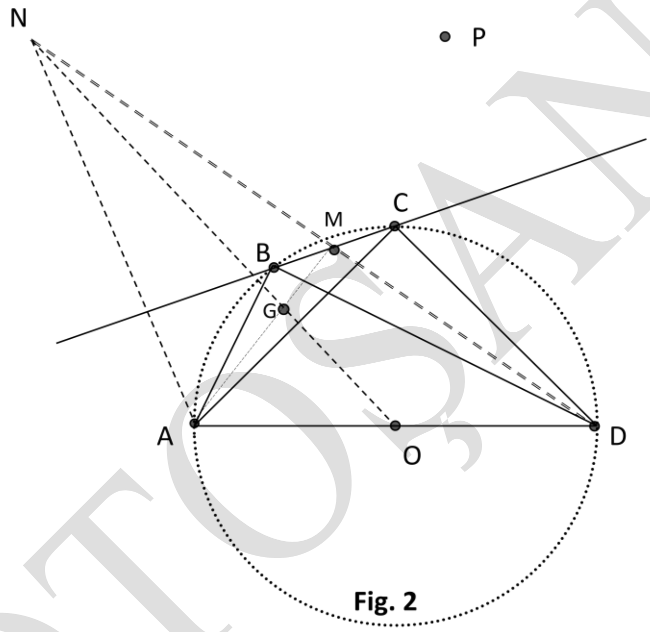

Fig. 2

SUBIECTUL IV (Vezi fig. 2)

a) Notăm cu M mijlocul segmentului (BC) şi cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC obţinem $\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$. Punctele A, B, C şi D se află pe cercul de centru O şi rază OA deci $OM \perp BC$ $\Rightarrow OM \parallel AN$ .... $(1p)$

Teorema lui Thales $\Rightarrow$ $\frac{OG}{GN} = \frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$ şi cum NO este mediană în $\triangle NAD \Rightarrow G$ este centru de greutate şi în $\triangle NAD$ .... $(1p)$

$\Rightarrow$ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ .... $(1p)$

Variantă: Se arată că M este şi mijlocul lui (ND) (de exemplu cu reciproca teoremei liniei mijlocii) şi se utilizează vectorul de poziţie al mijlocului unui segment ($NCDB$ este paralelogram).

b) Din relaţia de la *a)* $\Rightarrow$ $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ şi cum O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC $\Rightarrow$ (Relaţia lui Sylvester) N este ortocentru în $\triangle ABC$ .... $(2p)$

c) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow NPDA$ paralelogram.................. $(2p)$

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.