OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 24 februarie 2024
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie mulțimea $G = \left\{ A(\alpha) = \begin{pmatrix} cos\alpha & \frac{1}{n} \cdot sin\alpha \\ -n \cdot sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0; 2\pi) \right\}, n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Pe mulțimea G se consideră operația de înmulțire a matricelor.

a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian

b) Determinați $A^p\left(\frac{\pi}{2}\right)$, unde $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.

SUBIECTUL II

a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculați $\int_1^n \{x\}^2 dx$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real *x*.

b) Calculați limita : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \int_1^{n^2} \left[\sqrt{x}\right] dx$, unde $[x]$este partea întreagă a numărului real x

SUBIECTUL III

Determinați toate mulțimile M $\subset \mathbb{C}$ cu proprietățile:

i) card M = 4

ii) M parte stabilă a mulțimii numerelor complexe în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, dacă\ x < 0 \\ m, dacă\ x = 0 \\ xlnx, dacă\ x > 0. \end{cases}$$

Aflați *m* pentru care funcția f admite primitive.

Toate subiectele sunt obligatorii
Durata probei scrise este de 3 ore
Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte