

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 28 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1. Se dau numerele $a = \sqrt{1+3+5+7+9+11} - \sqrt{1+3+5+7+9}$,
 $b = \sqrt{1+3+5+\dots+4029}$ și $c = \sqrt{1+3+5+\dots+4027}$. Să se calculeze:

a) a^{2015}

b) $(b-c)^{2015}$

c) $(b+c)^{a-1}$

2. Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22}.$$

SGM nr. 11/2014

3. Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = a\sqrt{2}$ și $BC = AC = 2a$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara în D pe care se ia punctul M astfel încât $MD = a\sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) distanța de la punctul M la AB ;

b) aria triunghiului MAB ;

c) distanța de la punctul M la AC ;

d) măsura unghiului dintre planele (MAC) și (ABC) .

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu **7** puncte;
- Timp efectiv de lucru 2 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 28 februarie 2015
Clasa a VIII-a
Barem de corectare

1. Se dau numerele $a = \sqrt{1+3+5+7+9+11} - \sqrt{1+3+5+7+9}$, $b = \sqrt{1+3+5+\dots+4029}$
și $c = \sqrt{1+3+5+\dots+4027}$. Să se calculeze:

- a) a^{2015}
b) $(b-c)^{2015}$
c) $(b+c)^{a-1}$

Soluție:

a) $1+3+5+7+9+11 = 1+2+3+4+\dots+11 - (2+4+\dots+10) = \frac{11 \cdot 12}{2} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 6^2$,1p

$1+3+5+7+9 = 1+2+3+4+\dots+9 - (2+4+\dots+8) = 5^2$, $a = \sqrt{6^2} - \sqrt{5^2} = 6 - 5 = 1$ 1p

$a^{2015} = 1^{2015} = 1$ 1p

b) folosind a) obținem $1+3+5+\dots+4029 = 1+2+3+4+\dots+4029 - (2+4+\dots+4028) = 2015^2$, deci

$b = \sqrt{2015^2} = 2015$ 1p

analog $c = \sqrt{2014^2} = 2014$ 1p

$(b-c)^{2015} = 1^{2015} = 1$ 1p

c) $(b+c)^{a-1} = 4029^0 = 1$ 1p

2. Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22} .$$

Soluție:

căutăm pătratele perfecte care conțin cei trei radicali

$(x-4) - 2\sqrt{x-4} + 1 = (\sqrt{x-4} - 1)^2$ 1p

$(y-9) - 2 \cdot 2\sqrt{y-9} + 4 = (\sqrt{y-9} - 2)^2$ 1p

$(z-22) - 2 \cdot 3\sqrt{z-22} + 9 = (\sqrt{z-22} - 3)^2$ 1p

$-4+1-9+4-22+9 = -21$, obținem sumă de pătrate perfecte egală cu zero \Leftrightarrow fiecare pătrat este egal cu zero.....1p

$\Rightarrow \sqrt{x-4} = 1, \sqrt{y-9} = 2, \sqrt{z-22} = 3$ 1p

$\Rightarrow x-4=1, y-9=4, z-22=9$ 1p

$\Rightarrow x=5, y=13, z=31$ 1p

3. Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = a\sqrt{2}$ și $BC = AC = 2a$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara în D pe care se ia punctul M astfel încât $MD = a\sqrt{3}$. Să se calculeze:

- distanța de la punctul M la AB ;
- aria triunghiului MAB ;
- distanța de la punctul M la AC ;
- măsura unghiului dintre planele (MAC) și (ABC) .

Soluție:

- a) în $\triangle ADC$ aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora și obținem triunghi dreptunghic în D , deci trapezul este dreptunghic1p
din teorema celor trei perpendiculare obținem $d(M, AB) = MA$, $MA = a\sqrt{5}$ 1p
- b) fie $CE \perp AB$, $E \in [AB]$; obținem cu teorema lui Pitagora $BE = a\sqrt{2}$, deci $AB = 2a\sqrt{2}$ 1p
 $\triangle MAB$ este dreptunghic, obținem $A = a^2\sqrt{10}$ 1p
- c) fie $DP \perp AC$, $P \in [AC]$, $AECD$ pătrat $\Rightarrow DP = a$ 1p
din teorema celor trei perpendiculare obținem $d(M, AC) = MP$, $MP = 2a$ 1p
- d) unghiul căutat este $\sphericalangle MPD$, $\sin(\sphericalangle MPD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle MPD) = 60^\circ$ 1p