Clasa a VII-a

1. Fie a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + b^2 = c^2$. Arătați că:

a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Există numerele a, $b \in \mathbb{N}^*$, nedivizibile cu 5 și prime între ele, astfel ca $\sqrt{a^2 \cdot b^2 + c^2}$ să fie natural.

2. Fie numerele întregi impare $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ și numerele întregi pare $b_1, b_2, \ldots, b_{2015}$. Arătați că:

a) Orice număr pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k + 1$, unde k este număr natural.

b) $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots + a_{2015}^2 + b_{2015}^2} \notin \mathbb{Q}$.

3. În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, se consideră bisectoarele $(AD$, respectiv $(CE$, cu $D \in BC$, $E \in AB$ și punctul F mijlocul lui $[AC]$, astfel încât $EF \perp AC$, $FD \parallel AB$.

a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Arătați că triunghiul ABP este isoscel, unde $AD \cap EF = \{P\}$.

4. Romburile $ABCD$ și $DEFG$ au un singur punct comun, $[AB] \equiv [DE]$, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF) \neq 90°$, iar punctele B, D și F sunt coliniare. Arătați că:

a) $m(\sphericalangle ADG) = 90°$.

b) Mijlocul segmentului $[BF]$ este punctul L, unde $\{L\} = AE \cap CG$.