INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN V A S L U I

TELEFON: 0235/311928 , FAX: 0235/311715

e-mail: **isjvaslui@isj.vs.edu.ro**

website : **http://isj.vs.edu.ro**

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

9 februarie 2013-CLASA a XI-a

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(Z)$:

a) Calculați $A^n, n \in N^*$.

b) Determinati $X \in M_2(Z)$ astfel încat AX=XA.

c) Daca $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(Z)$, determinati X^n,$n \in N^*$.

2. Fie A, B,C $\in M_n(R)$ cu proprietatea că oricare două dintre ele comută.

a)Arătați că $A^2+B^2+C^2 - AB - BC - CA=(A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C)(A+\varepsilon^2 B+\varepsilon C)$, unde ε este o rădăcină complexă nereală de ordinul trei a unității.

b) Demonstrați că $\det(A^2+B^2+C^2 - AB - BC - CA) \geq 0$.

3. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{n^2+k}\}$,$n\geq 1$ unde $\{x\}$ reprezinta partea fractionara a lui x.

a) Calculati $\lim_{n\to\infty} x_n$.

b) Calculati $\lim_{n\to\infty} n(x_n - \frac{1}{4})$.

4. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale definit prin: $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2x_n}{6}, n \geq 0.$ Să se arate că pentru $x_0 \in [0,2]$ are limită finită. Determinați această limită.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

1.a) Calculează A^2, A^3 ....(**1p)**

Presupunem $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$ şi demonstrăm prin inducţie matematică că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$,

unde: $x_{n+1} = x_n + 2y_n,\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \Rightarrow x_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}, y_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$ .....**(2,5p)**

2.b) X=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si AX=XA se obtine X=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ **(1p)**

2.c) Se demonstreaza prin inductie matematica :

$$X^n=\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix},\ (\forall)\ n\in N^*.$$ **(2,5p)**

2.a) Fie ε rădăcina complexă de ordin trei a unităţii. Atunci $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$, $\varepsilon^3=1$ conduc la $\varepsilon^2+\varepsilon = -1$, $\varepsilon^4=\varepsilon$ **(1p)**.
Desfacerea parantezelor din membrul drept şi efectuarea calculelor, finalizare **(2p)**

2.b) det $(A^2+B^2+C^2 - AB - BC - CA)$ = det$(A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C)(A+\varepsilon^2 B+\varepsilon C)$ **(1p) =**
=det$(A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C)(\overline{A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C})$ **(1p)**=det$(A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C)$ .det$(\overline{A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C})$ **(1p)** $=|\det(A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C)|^2 \geq 0$ **(1p).**

3.a) $[\sqrt{n^2+k}]=n$, $(\forall)\ 1\leq k \leq n$, astfel

$\{\sqrt{n^2+k}\}=\sqrt{n^2+k}-n$ **(1p)**

$x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2+k}-n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}$ **(1p)**

$\frac{k}{\sqrt{n^2+n}+n} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}+n}$, prin sumare si inmultire cu $\frac{1}{n}$

se obtine: $\frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+n}+n)} \leq x_n \leq \frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+1}+n)}$ **(1p)**

Se aplica criteriul clestelui si se obtine $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{4}$ **(1p)**

3.b) $n(x_n-\frac{1}{4})=nx_n-\frac{n}{4}=\left(nx_n-\frac{n+1}{4}\right)+\frac{1}{4}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\frac{1}{4}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n(\sqrt{n^2+k}+n)^2}+\frac{1}{4}$ **(1p)**

$$\frac{k^2}{2n(\sqrt{n^2+n}+n)^2}\le\frac{k^2}{2n(\sqrt{n^2+k}+n)^2}\le\frac{k^2}{2n(\sqrt{n^2+1}+n)^2}$$

Prin sumare se obtine:

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(\sqrt{n^2+n}+n)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n(\sqrt{n^2+k}+n)^2}\le\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(\sqrt{n^2+1}+n)^2}$ **(1p)**

Se aplica criteriul clestelui si se obtine $\lim_{n\to\infty}n(x_n-\frac{1}{4})=\frac{5}{24}$ **(1p)**

4. Observăm că dacă $x_0=2$ rezultă imediat $x_n=2, n\ge 1$, şi $\lim_{n\to\infty}x_n$=2 **(1p).**

Dacă $0\le x_0\prec 2$ calculăm diferența

$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^3-4x_n}{6}=\frac{1}{6}x_n(x_n-2)(x_n+2), n\ge 0$.**(2p)**

Arătăm prin inducție că $x_n\prec 2, n\ge 1$. În adevăr $x_{n+1}=\frac{x_n^3+2x_n}{6}\prec\frac{2^3+2.2}{6}=\frac{12}{6}=2, \forall x\ge 0$.
(2p)

Atunci $x_{n+1}-x_n\prec 0$, deci şirul este descrecător. Notând $l=\lim_{n\to\infty}x_n$ obținem $l=\frac{l^3+2l}{4}$, de unde $l\in\{0,-2,2\}$. **(1p)** Cum $0\le x_n\prec x_0\prec 2$, rezultă $l=0$.**(1p)**

Orice soluție corectă se punctează cu 7 puncte.