Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a VIII-a

1. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, cu $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm, în punctul A se ridică perpendiculara, pe care se consideră punctele E şi F, astfel încât $AE = 4\sqrt{3}$ cm şi $AF = 4\sqrt{15}\,cm$. Arătaţi că aria triunghiului EBC este media geometrică a ariilor triunghiurilor ABC şi FBC.

Supliment Gazeta Matematică – nr.9/2012

2. **a)** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un pătrat perfect. Demonstraţi că restul împărţirii sale la 4 este 0 sau 1.

b) Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care lungimile muchiilor AB, AD şi AA' sunt exprimate prim numere naturale impare. Demonstraţi că lungimea diagonalei AC' este exprimată printr-un număr iraţional.

3. **a)** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 \leq 2ab$. Demonstraţi că $a = b$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$. Demonstraţi că numărul $3^x + 3^y$ se divide cu 41.

Gazeta Matematică – nr.6-7-8/2012

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei BC şi N mijlocul muchiei BD. Pe semidreapta $(DM$ alegem punctul E astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta $(CN$ alegem punctul F astfel încât $CF = 2CN$

a) Demonstraţi că punctele F, B, E sunt coliniare;

b) Demonstraţi că triunghiul $\triangle AEF$ este isoscel.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 16 februarie 2013

Clasa a VIII-a - barem

1. $BC = 8cm \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = 4cm$ **2p**

Din T.3 $\perp \Rightarrow EM \perp BC, EM = 8cm$ şi obţinem $A_{EBC} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32\left(cm^2\right)$, **2p**

Din T.3 $\perp \Rightarrow FM \perp BC, FM = 16cm$, deci $A_{FBC} = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64\left(cm^2\right)$ **2p**

Cum $A_{ABC} = 16\left(cm^2\right)$ se obţine concluzia. **1p**

2. **a)** Se analizează cazurile $n = 2k$ şi $n = 2k + 1$. **2p**

b) $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$ **1p**

Numerele AB^2, AD^2, AA'^2 sunt de forma $4k + 1$. **2p**

Suma lor este de forma $4k + 3$ deci nu este pătrat perfect şi apoi concluzia. **2p**

3. **a)** Ipoteza conduce la $(a - b)^2 \le 0 \Rightarrow a = b$. **2p**

b) Cu notaţia $a = 3^{x-2}$ şi $b = 3^{y+2}$ ipoteza devine $a^2 + b^2 \le 2ab$ de unde $a = b \Rightarrow 3^{x-2} = 3^{y+2}$ **2p**

$\Rightarrow 3^x = 3^{y+4}$ **1p**

$\Rightarrow 3^x + 3^y = 3^y \cdot 82$ şi concluzia. **2p**

4. **a)** Patrulaterele $CDFB$ şi $CDBE$ sunt paralelograme. **2p**

BF şi BE sunt paralele cu DC, deci F, B, E sunt coliniare. **1p**

b) B este mijlocul lui EF. **1p**

$AB \perp CD \Rightarrow AB \perp EF$; **2p**

Finalizare. **1p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.