Barem de notare – clasa a VII-a

Problema 1. a) Determinaţi numerele naturale *n*, de patru cifre, astfel încât $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} \in \mathbb{N}$.

b) Comparaţi numerele $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ şi $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Soluţie:

a) $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^4 \cdot 2^2 \cdot n}}} \in \mathbb{N}$ **1p**

Numărul obţinut se poate scrie şi sub forma $\sqrt[8]{3^4 \cdot 2^2 \cdot n} \in \mathbb{N}$

Obţinem $n = 3^{4a} \cdot 2^{8b-2}$, *a* număr natural impar şi $b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Pentru *a*=*b*=*1* obţinem $n = 3^4 \cdot 2^6 = 81 \cdot 64 = 5184$ - soluţie..**0,5p**

Dacă *a*=*1*, *b*=*2* obţinem $n = 3^4 \cdot 2^{14} > \overline{xyzt}$

Dacă *a*=*3*, *b*=*1* obţinem $n = 3^{12} \cdot 2^6 > \overline{xyzt}$ …………………………………………….**0,5p**

Deci unica soluţie este *n*=5184.

b) Fie $x = \sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ şi $y = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, atunci avem:

$x^2 = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{2}^{2\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$ şi $y^2 = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{3}^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ ……………………..**1,5p**

$\left(x^2\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{6}} < 2^3 = 8$ şi $\left(y^2\right)^{\sqrt{2}} = \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^2 = 9$ ………………………..**2p**

Obţinem $x^2 < y^2$ şi cum *x*,*y* sunt numere pozitive, rezultă $x < y$. ………………….**0,5p**

Problema 2. a) Determinaţi $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{2^x}+\sqrt{2^y}=33$.

b) Se dă numărul $x=\sqrt{\underbrace{44...44}_{2n cifre}-\underbrace{88...88}_{n cifre}}$ unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Arătaţi că x este număr natural.

Soluţie:

a) Dacă cel puţin unul din numerele x şi y este impar, expresia $\sqrt{2^x}+\sqrt{2^y}$ este număr iraţional, deci $\sqrt{2^x}+\sqrt{2^y}\neq 33$ **0,5p**

Deducem că x şi y sunt numere pare. Fie $x=2n, y=2m$ cu $m,n\in\mathbb{N}$. **0,5p**

Egalitatea dată devine $2^n+2^m=33$ **0,5p**

33 este un număr impar, deci 2^n şi 2^m au parităţi diferite. **0,5p**

Dacă $2^n=$par şi $2^m=$impar$\Rightarrow m=0,$ iar $2^n+1=33\Rightarrow 2^n=32\Rightarrow n=5$

Deci x=10 şi y=0.. **0,5p**

Dacă $2^n=$impar şi $2^m=$par, soluţia este x=0 şi y=10.................................... **0,25p**

Problema are două soluţii: $(10;0)$ şi $(0;10)$ **0,25p**

b) Fie $a=\underbrace{11...11}_{n cifre}$.

Obţinem $x=\sqrt{4\cdot\left(a\cdot 10^n+a\right)-8a}$ **1p**

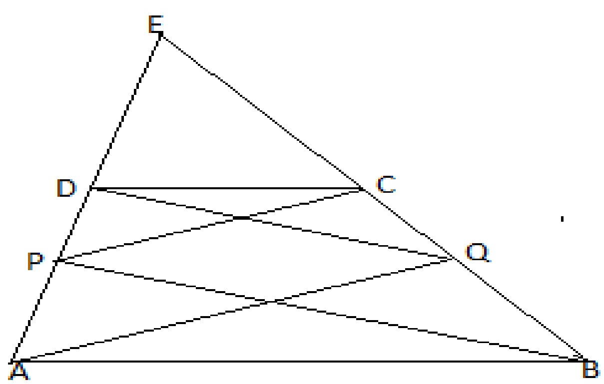
$x=\sqrt{4\cdot\left(a\cdot 10^n+a-2a\right)}=2\cdot\sqrt{a\cdot\left(10^n-1\right)}$ **1p**

Rezultă $x=2\cdot\sqrt{a\cdot\underbrace{99...99}_{n cifre}}=2\sqrt{a\cdot 9a}=2\sqrt{9a^2}=2\cdot 3a=6a$ **1,5p**

Deci $x=\underbrace{66...66}_{n cifre}$. **0,5p**

Problema 3. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ $(AB>CD)$, pe latura $[AD]$ se ia un punct P, iar pe latura $[BC]$ un punct Q, astfel încât $AQ \parallel PC$. Demonstraţi că $PB \parallel DQ$.

Soluţie:



Fie $AD \cap CB = \{E\}$ **1p**

În $\triangle EAB, CD \parallel AB \xrightarrow{T.Th} \dfrac{ED}{EA} = \dfrac{EC}{EB} (1)$ **2p**

În $\triangle EAQ, PC \parallel AQ \xrightarrow{T.Th} \dfrac{EP}{EA} = \dfrac{EC}{EQ} (2)$ **2p**

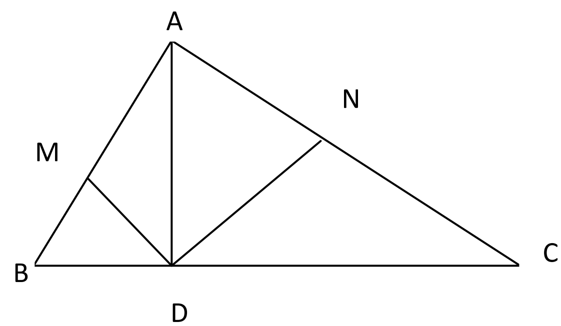
Împărţind relaţiile (1) şi (2) membru cu membru obţinem:

$\dfrac{ED}{EP} = \dfrac{EQ}{EB} \xrightarrow{T.R.Th} DQ \parallel PB$ **2p**

Problema 4. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A)=90^0, D\in(BC), AD\perp BC$ şi punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ astfel încât $MA\cdot NA=MB\cdot NC$.

Demonstraţi că $m(\sphericalangle MDN)=90^0$.

Gazeta matematică



Soluţie:

$MA\cdot NA=MB\cdot NC\Rightarrow\dfrac{MB}{MA}=\dfrac{NA}{NC}$ (1)..**0,5p**

Presupunem că $[DN$ bisectoarea $\sphericalangle ADC\xrightarrow{T.bis.}\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{NA}{NC}(2)$ **1,5p**

Presupunem că $[DM$ bisectoarea $\sphericalangle ADB\xrightarrow{T.bis.}\dfrac{DB}{DA}=\dfrac{MB}{MA}(3)$ **1,5p**

Din (1),(2),(3) $\Rightarrow\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{DB}{DA}(4)$ care trebuie demonstrată. **1p**

Dar $\triangle ADB\sim\triangle CDA(U.U)\Rightarrow\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{DB}{DA}\Rightarrow$ presupunerile făcute sunt adevărate, ţinând cont şi de unicitatea punctelor M şi N care împart interior un segment în acelaşi raport............................ **2p**

Obţinem $m(\sphericalangle MDN)=90^0$ **0,5p**