OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 19.02.2015

Subiecte clasa a IX-a matematică-informatică

1. a) Fie numerele $a,b\in\mathbb{R}$, unde $a+b=1$. Să se arate că $|a-1|+|b-2|\geq 2$.
   b) Dacă $x_1,x_2,...,x_{2n}\in\mathbb{R}$ şi $x_1+x_2+...+x_{2n}=2n(n+1)$, să se demonstreze că $|x_1-1|+|x_2-2|+...+|x_{2n}-2n|\geq n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni strict pozitivi, definit prin $a_1=1$ şi $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}=\frac{n+1}{2}\sqrt{a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $\sqrt{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\sqrt{a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi să se determine expresia termenului general a_n.

3. Să se rezolve ecuația $\{x\}^2+\{x\}+1=(1+\{x\})\cdot[1-\{x\}]$, unde $x\in\mathbb{R}$, $\{x\}$ este partea fracționară a lui x, iar $[1-\{x\}]$ reprezintă partea întreagă a numărului $1-\{x\}$.

(prof. George Georgescu)

4. Se dă triunghiul ABC cu $AB<AC$, $(AA'$ bisectoarea unghiului A, $A'\in(BC)$ şi M mijlocul segmentului $[AA']$. Perpendiculara în M pe AA' intersectează dreapta AB în D şi dreapta AC în E.
   a) Să se arate că vectorul $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}$ nu poate fi coliniar cu vectorul $\overrightarrow{AA'}$.
   b) Dacă $DE\cap BC=\{F\}$, să se arate că $\frac{DB}{EC}=\frac{FB}{FC}$.
   c) Să se arate că $\frac{DB}{EC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 19.02.2015

barem clasa a IX-a matematică-informatică

1. a) $|a-1|+|b-2|\geq|a-1+b-2|=2$ 3p

   b) aplică proprietatea modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor........2p

   folosește ipoteza $x_1+x_2+...+x_{2n}=2n(n+1)$ 1p

   obține rezultatul...1p

2. Se scade egalitatea dată din $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}=\frac{n+2}{2}\sqrt{a_{n+1}}$ obținută prin înlocuirea în relația dată pe *n* cu *n+1*..2p

   Se obține $\sqrt{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\sqrt{a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

   Se calculează $a_2=4$ 1p

   Se demonstrează prin inducție că $a_n=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 3p

3. Se împarte ecuația cu $1+\{x\}$ și se obține $\{x\}+\frac{1}{1+\{x\}}=[1-\{x\}]$.............................1p

   Din $1+\{x\}+\frac{1}{1+\{x\}}\geq 2\Rightarrow\{x\}+\frac{1}{1+\{x\}}\geq 1$..2p

   Din $1-\{x\}\leq 1\Rightarrow[1-\{x\}]\leq 1$ 2p

   Egalitatea are loc pentru $[1-\{x\}]=1$ sau $1+\{x\}=1\Rightarrow\{x\}=0$ 1p

   Se obține soluția $x\in\mathbb{Z}$ 1p

4. a) Se observă că $ADA'E$ este romb (diagonalele sunt bisectoare şi sunt perpendiculare)..1p

   $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MN}$, unde *N* este mijlocul laturii $[BC]$ 1p

   Dacă $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}$ ar fi coliniar cu $\overrightarrow{AA'}$ atunci ar exista $\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{MN}=\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AA'}$. Deoarece A, M, A' sunt coliniare, rezultă că $N\in AA'$, absurd...........1p

   b) Se aplică teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC şi punctele coliniare D, E, F şi se ține seama că $AD=AE$ (romb).....................................2p

   c) Se aplică teorema lui Thales pentru triunghiul ABC şi $A'D \parallel AC$, respectiv $A'E \parallel AB$, se înmulțesc relațiile şi se obține $\frac{BD}{BA}\cdot\frac{CA}{CE}=\frac{BA'}{CA'}$ 1p

   Se aplică teorema bisectoarei în triunghiul ABC, se obține $\frac{BA'}{CA'}=\frac{AB}{AC}$, de unde rezultă concluzia..1p