|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa locală**

**Județul Alba, 13 februarie 2015**

**Clasa a X-a**

**Problema 1.**

a) Să se arate că .

b) Fie numerele reale . Să se arate că:

.

Când avem egalitate?

**Problema 2.**

Fie Se consideră o funcţie injectivă cu proprietatea că funcţia este constantă.

a) Să se arate că

b) Pentru , să se dea un exemplu de funcţie care are proprietatea din enunţ.

**Problema 3.**

Fie şi astfel încât .

a) Arătaţi că

b) Arătaţi că .

**Problema 4.**

Considerăm triunghiul ascuţitunghic înscris în cercul şi ortocentrul triunghiului. Fie centrele de greutate ale triunghiurilor respectiv . Dacă , să se arate că triunghiul este echilateral.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a X-a**

**Problema 1.**

a) Să se arate că .

b) Fie numerele reale . Să se arate că:

.

Când avem egalitate?

**Soluţie şi barem:**

a) • ...........................................................................................**2p**

• ..............................................................................**1p**

b) Notăm .

• Din punctul a) avem .......**1p**

• Cum obţinem ...............................................**1p**

• Din inegalitatea mediilor rezultă , deci ...............**1p**

• Avem egalitate dacă şi numai dacă (conform punctului a)) .................**1p**

**Problema 2.**

Fie Se consideră o funcţie injectivă cu proprietatea că funcţia este constantă.

a) Să se arate că

b) Pentru , să se dea un exemplu de funcţie care are proprietatea din enunţ.

**Soluţie şi barem:**

a) • , ...................................................**2p**

• ; este injectivă, deci .......**1p**

• , de unde ............................................................................**1p**

• Dacă obţinem că nu este injectivă, deci ..........................................**1p**

b) • Un exemplu este funcţia identică , care este injectivă ......**1p**

• Avem , deci este constantă.............**1p**

**Problema 3.**

Fie şi astfel încât .

a) Arătaţi că

b) Arătaţi că .

**Soluţie şi barem:**

a) • şi cum , vom avea ..........**2p**

• .............**2p**

• .....................................................**1p**

b) • ...................................................**1p**

• ....................**1p**

**Problema 4.**

Considerăm triunghiul ascuţitunghic înscris în cercul şi ortocentrul triunghiului. Fie centrele de greutate ale triunghiurilor respectiv . Dacă , să se arate că triunghiul este echilateral.

**Soluţie şi barem:**

Considerăm reperul cu originea în şi afixele punctelor respectiv .

• Avem şi ....................................................................**1p**

• ........................**1p**

• Analog obţinem ......................................................**1p**

• Avem

Utilizând inegalitatea Cauchy-Bunikovski-Schwartz, obţinem:

, şi de aici,

prin calcul, obţinem

...........................................................................................................................................**2p**

• Rezultă şi de aici

, cu egalitate dacă şi numai dacă .....................................**1p**

• Rezultă că , deci triunghiul este echilateral ....................................................**1p**