|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa locală**

**Județul Alba, 13 februarie 2015**

**Clasa a X-a**

**Problema 1.**

a) Să se arate că $x^{3}-3x^{2}+4\geq 0, \left(∀\right)x\geq -1$.

b) Fie numerele reale $a,b,c>1$. Să se arate că:

$log\_{a}\left(b\sqrt{b}-2b+4\right)+log\_{b}\left(c\sqrt{c}-2c+4\right)+log\_{c}\left(a\sqrt{a}-2a+4\right)\geq 3$.

Când avem egalitate?

**Problema 2.**

Fie $a , b\in \left(0,\infty \right)∖\left\{1\right\}.$ Se consideră o funcţie injectivă $f:R\rightarrow R$ cu proprietatea că funcţia $g:\left(0,\infty \right)\rightarrow R , g\left(x\right)=f\left(log\_{a}x\right)+f\left(log\_{b}x\right)$ este constantă.

a) Să se arate că $a∙b=1.$

b) Pentru $b=\frac{1}{a}$ , să se dea un exemplu de funcţie $f:R\rightarrow R$ care are proprietatea din enunţ.

**Problema 3.**

Fie $z\in C∖R$ şi $a\in R$ astfel încât $z^{4}-az+9=0$.

a) Arătaţi că $\left|z\right|^{2}\left(\overbar{z}^{2}+\overbar{z}∙z+z^{2}\right)=9$

b) Arătaţi că $\left|Re\left(z\right)\right|\geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

**Problema 4.**

 Considerăm triunghiul ascuţitunghic $ABC$ înscris în cercul $C\left(O,R\right)$ şi $H$ ortocentrul triunghiului. Fie $G\_{1}, G\_{2}, G\_{3}$ centrele de greutate ale triunghiurilor $HBC, HAC$ respectiv $HAB$. Dacă $AG\_{1}+BG\_{2}+CG\_{3}=4R$, să se arate că triunghiul $ABC$ este echilateral.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a X-a**

**Problema 1.**

a) Să se arate că $x^{3}-3x^{2}+4\geq 0, \left(∀\right)x\geq -1$.

b) Fie numerele reale $a,b,c>1$. Să se arate că:

$log\_{a}\left(b\sqrt{b}-2b+4\right)+log\_{b}\left(c\sqrt{c}-2c+4\right)+log\_{c}\left(a\sqrt{a}-2a+4\right)\geq 3$.

Când avem egalitate?

**Soluţie şi barem:**

a) • $\left(x+1\right)\left(x^{2}-4x+4\right)\geq 0$ ...........................................................................................**2p**

• $\left(x+1\right)\left(x-2\right)^{2}\geq 0, \left(∀\right) x\geq -1$ ..............................................................................**1p**

b) Notăm $E=log\_{a}\left(b\sqrt{b}-2b+4\right)+log\_{b}\left(c\sqrt{c}-2c+4\right)+log\_{c}\left(a\sqrt{a}-2a+4\right)$.

 • Din punctul a) avem $b\sqrt{b}-2b+4\geq b, c\sqrt{c}-2c+4\geq c, a\sqrt{a}-2a+4\geq a$ .......**1p**

• Cum $a,b,c>1$ obţinem $E\geq log\_{a}b+log\_{b}c+log\_{c}a$ ...............................................**1p**

• Din inegalitatea mediilor rezultă $log\_{a}b+log\_{b}c+log\_{c}a\geq 3$, deci $E\geq 3$ ...............**1p**

 • Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=4$ (conform punctului a)) .................**1p**

**Problema 2.**

Fie $a , b\in \left(0,\infty \right)∖\left\{1\right\}.$ Se consideră o funcţie injectivă $f:R\rightarrow R$ cu proprietatea că funcţia $g:\left(0,\infty \right)\rightarrow R , g\left(x\right)=f\left(log\_{a}x\right)+f\left(log\_{b}x\right)$ este constantă.

a) Să se arate că $a∙b=1.$

b) Pentru $b=\frac{1}{a}$ , să se dea un exemplu de funcţie $f:R\rightarrow R$ care are proprietatea din enunţ.

**Soluţie şi barem:**

a) • $g\left(a\right)=f\left(1\right)+f\left(log\_{b}a\right)$, $g\left(b\right)=f\left(1\right)+f\left(log\_{a}b\right)$...................................................**2p**

• $g\left(a\right)=g\left(b\right)⟹f\left(log\_{a}b\right)=f\left(log\_{b}a\right)$; $f$ este injectivă, deci $log\_{a}b=log\_{b}a$ .......**1p**

• $\left(log\_{a}b\right)^{2}=1$, de unde $log\_{a}b=\pm 1$ ............................................................................**1p**

 • Dacă $a=b$ obţinem că $f$ nu este injectivă, deci $a∙b=1$ ..........................................**1p**

b) • Un exemplu este funcţia identică $f:R\rightarrow R, f\left(x\right)=x, x\in R$, care este injectivă ......**1p**

• Avem $g\left(x\right)=log\_{a}x+log\_{\frac{1}{a}}x=log\_{a}x-log\_{a}x=0$, deci $g$ este constantă.............**1p**

**Problema 3.**

Fie $z\in C∖R$ şi $a\in R$ astfel încât $z^{4}-az+9=0$.

a) Arătaţi că $\left|z\right|^{2}\left(\overbar{z}^{2}+\overbar{z}∙z+z^{2}\right)=9$

b) Arătaţi că $\left|Re\left(z\right)\right|\geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

**Soluţie şi barem:**

a) • $a=\frac{z^{4}+9}{z}$ şi cum $a\in R$, vom avea $\frac{\overbar{z}^{4}+9}{\overbar{z}}=\frac{z^{4}+9}{z} ⟹z∙\overbar{z}^{4}+9z=\overbar{z}∙z^{4}+9\overbar{z}$ ..........**2p**

• $z∙\overbar{z}\left(\overbar{z}^{3}-z^{3}\right)-9\left(\overbar{z}-z\right)=0⟹\left(\overbar{z}-z\right)\left[\left|z\right|^{2}\left(\overbar{z}^{2}+\overbar{z}∙z+z^{2}\right)-9\right]=0$ .............**2p**

 • $z\in C∖R⟹z\ne \overbar{z}⟹\left|z\right|^{2}\left(\overbar{z}^{2}+\overbar{z}∙z+z^{2}\right)=9$ .....................................................**1p**

b) • $\left(z+\overbar{z}\right)^{2}-z∙\overbar{z}=\frac{9}{\left|z\right|^{2}} ⟹4\left(Re\left(z\right)\right)^{2}=\left|z\right|^{2}+\frac{9}{\left|z\right|^{2}}$ ...................................................**1p**

• $\left|z\right|^{2}+\frac{9}{\left|z\right|^{2}}\geq 2\sqrt{\left|z\right|^{2}∙\frac{9}{\left|z\right|^{2}}}=6 ⟹ 4\left(Re\left(z\right)\right)^{2}\geq 6 ⟹ \left|Re\left(z\right)\right|\geq \frac{\sqrt{6}}{2}$....................**1p**

**Problema 4.**

 Considerăm triunghiul ascuţitunghic $ABC$ înscris în cercul $C\left(O,R\right)$ şi $H$ ortocentrul triunghiului. Fie $G\_{1}, G\_{2}, G\_{3}$ centrele de greutate ale triunghiurilor $HBC, HAC$ respectiv $HAB$. Dacă $AG\_{1}+BG\_{2}+CG\_{3}=4R$, să se arate că triunghiul $ABC$ este echilateral.

**Soluţie şi barem:**

Considerăm reperul cu originea în $O$ şi $a,b,c,z$ afixele punctelor $A,B,C$ respectiv $H$.

• Avem $\left|a\right|=\left|b\right|=\left|c\right|=R$ şi $z=a+b+c$ ....................................................................**1p**

• $AG\_{1}=\left|z\_{G\_{1}}-a\right|=\left|\frac{1}{3}\left(z+b+c\right)-a\right|=\left|\frac{1}{3}\left(2z-a\right)-a\right|=\frac{2}{3}\left|z-2a\right|$ ........................**1p**

• Analog obţinem $BG\_{2}=\frac{2}{3}\left|z-2b\right|, CG\_{3}=\frac{2}{3}\left|z-2c\right|$ ......................................................**1p**

• Avem $AG\_{1}+BG\_{2}+CG\_{3}=\frac{2}{3}\left(\left|z-2a\right|+\left|z-2b\right|+\left|z-2c\right|\right)$

 Utilizând inegalitatea Cauchy-Bunikovski-Schwartz, obţinem:

 $\left(\left|z-2a\right|+\left|z-2b\right|+\left|z-2c\right|\right)^{2}\leq 3\left(\left|z-2a\right|^{2}+\left|z-2b\right|^{2}+\left|z-2c\right|^{2}\right)$, şi de aici,

 prin calcul, obţinem $\left(\left|z-2a\right|+\left|z-2b\right|+\left|z-2c\right|\right)^{2}\leq 3\left(3\left|z\right|^{2}-2z\overline{z}-2\overline{z}z+12R^{2}\right)$

 ...........................................................................................................................................**2p**

• Rezultă $\left(\left|z-2a\right|+\left|z-2b\right|+\left|z-2c\right|\right)^{2}\leq 36R^{2}-3\left|z\right|^{2}\leq 36R^{2}$ şi de aici

 $AG\_{1}+BG\_{2}+CG\_{3}\leq 4R$, cu egalitate dacă şi numai dacă $z=0$ .....................................**1p**

• Rezultă că $H=O$, deci triunghiul $ABC$ este echilateral ....................................................**1p**