COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2013

Clasa a V-a

1. Se consideră mulțimile $A=\left\{x_n \middle| x_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n + 57,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ şi $B=\left\{y^4 \middle| y\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Demonstrați că $x_9 \notin B$.

b) Determinați mulțimea $A\cap B$.

2. Se consideră numărul natural $a = 1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{2009}$.

a) Demonstrați că numărul a este par.

b) Demonstrați că numărul a este divizibil cu 13.

c) Aflați restul împărțirii numărului b prin 13, unde $b=a+3^{2010}+3^{2011}$.

3. a) Determinați restul împărțirii unui număr natural prin 42, ştiind că prin împărțire la 6 dă restul 5 iar prin împărțire la 7 dă restul 3.

b) Arătați că numărul $21^{33}\cdot 33^{77}\cdot 77^{21}$ este pătrat perfect.

4. Determinați numerele naturale a, $\overline{bcd}$ şi e, ştiind că $4\cdot\left(2^{2a}\cdot 3^a+\overline{bcd}\right)+2^e=2013$.

Subiect elaborat de prof. Alice Anița

SOLUTII

Clasa a V-a

1. a) Ultima cifră a numărului x_9 este 7, deci x_9 nu este pătrat perfect. Cum B conține numai pătrate perfecte, înseamnă că $x_9 \notin B$.

b) Dacă $n \geq 5$, atunci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n + 57 = \overline{...7} \neq y^4, \forall y \in \mathbb{N}$. Pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, x_n are, corespunzător, valorile 58, 59, 63 și 81. Singurul dintre aceste numere care aparține lui B este 81, prin urmare $A \cap B = \{81\}$.

2. a) Suma dată are număr par de termeni impari, deci este număr par.

b) Grupând câte trei termenii sumei, obținem:

$$a = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + ... + (3^{2007} + 3^{2008} + 3^{2009}) = 13(1 + 3^3 + 3^6 + ... + 3^{2007}) \vdots 13.$$

c) Avem că $b = 1 + 3 + (3^2 + 3^3 + 3^4) + ... + (3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}) = 4 + 13(3^2 + 3^5 + ... + 3^{2009})$, deci $b = 13c + 4$, cu $4 < 13$. Rezultă că restul cerut este 4.

3. a) Folosind teorema împărțirii cu rest deducem că $n = 6a + 5$, respectiv $n = 7b + 3$. Atunci $7n = 42a + 35$, iar $6n = 42b + 18$. Prin scădere, obținem că $n = 42c + 17$, cu $17 < 42$, deci restul căutat este 17.

b) $21^{33} \cdot 33^{77} \cdot 77^{21} = 3^{110} \cdot 7^{54} \cdot 11^{98} = (3^{55} \cdot 7^{27} \cdot 11^{49})^2$.

4. Întrucât $4 \cdot (2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd})$ este par și 2013 este impar, rezultă că 2^e este impar, așadar $e = 0$. Atunci $2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bcd} = 503$, adică $12^a + \overline{bcd} = 503$. Deducem că $a \leq 2$ și, considerând cele trei situații, găsim soluțiile $(a, \overline{bcd}) \in \{(0, 502), (1, 491), (2, 359)\}$.