OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XII-a
27.02.2015

Subiectul I.(40 puncte)

Fie $G=\{A_x / x\in R\}, A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian;

b) Demonstraţi că $(G,\cdot)$ este izomorf cu $(R,+)$;

c) Calculaţi $A^{2015}, A\in G$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ Cluj

Subiectul II.(10 puncte)

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcţia $f:G\to G, f(x)=x^2$ este automorfism de grupuri. Arătaţi că mulţimea G are un număr impar de elemente.

prof. Simona Pop,Colegiul" Augustin Maior" Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

a) Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n x\cdot\sin\frac{1}{x}dx$.

prof. Mirela Blaga, Liceul Teoretic „Alexandru Papiu Ilarian" Dej

b) Să se arate că $\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)dx\le\frac{n(n+1)}{4}$.

prof. Teodor Poenaru, Liceul teoretic „Nicolae Bălcescu"Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Determinaţi toate funcţiile $f:R\to(0,\infty)$, primitivabile, ce verifică relaţia: $F(x)+\ln(f(x))=\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\forall x\in R$, unde $F:R\to R$ este o primitivă a lui f şi $F(0)=0$.

prof. Cristian Petru Pop,ISJ Cluj

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ţa Ştefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778, Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

Barem clasa a XII-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (40 puncte)

a) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow A(x)\cdot A(y)\in G\Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulţirea matricelor; **(5 p)**

Înmulţirea în $M_3(R)$ este asociativă, deci şi în G este asociativă; **(5 p)**

$I_3=A(0)\in G$ este elementul neutru pentru înmulţirea în G; **(5 p)**

$A(x)\cdot A(-x)=A(-x)\cdot A(x)=A(0)=I_3$, deci orice element din G este simetrizabil; **(5 p)**

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)=A(y+x)=A(y)\cdot A(x)$, deci înmulţirea în G este comutativă; **(5 p)**

b) Fie funcţia $f:G\to R,\ f(A(x))=x$

f bijectivă **(5 p)**

$f(A(x)A(y))=f(A(x+y))=x+y=f(A(x))+f(A(y))$, deci f este morfism de grupuri **(5 p)**

c) $f(A^n)=f\left(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\quad ori}\right)=f(A)+f(A)+\ldots+f(A)=n\cdot f(A)=nx\Rightarrow A^n=f^{-1}(nx)=A(nx)$

Atunci $A^{2015}=A(2015x)$. **(5 p)**

Subiectul II. (10 puncte)

Fie e elementul neutru al grupului G. Arătăm că $x\neq x^{-1},\forall x\in G\setminus\{e\}$.

Presupunem că $\exists x\in G\setminus\{e\},x=x^{-1}\Rightarrow x^2=e\Rightarrow f(x)=e,$ *dar* $f(e)=e\Rightarrow f(x)=f(e)\Rightarrow x=e$;Contrad.

Deci $x\neq x^{-1},\forall x\in G\setminus\{e\}$. Dacă grupăm elementele mulţimii $G\setminus\{e\}$ în perechi de forma (x,x^{-1}) observăm că $G\setminus\{e\}$ are un număr par de elemente, deci G va avea număr impar de elemente. **(10 p)**

Subiectul III. (20 puncte)

a) Teorema de medie $\Rightarrow\int_1^n x\cdot\sin\frac{1}{x}dx=F(n)-F(1)=(n-1)f(x_n)=(n-1)x_n\cdot\sin\frac{1}{x_n},x_n\in(1,n)$ **(5 p)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n x\cdot\sin\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n-1)x_n\cdot\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\underbrace{x_n\cdot\sin\frac{1}{x_n}}_{x_n\to\infty\Rightarrow x_n\cdot\sin\frac{1}{x_n}\to1}=1$$ **(5 p)**

b) $e^{nx}\geq1+nx\ \Rightarrow \mathrm{nx}\geq\ln(1+\mathrm{nx})\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^n\ln(1+kx)\leq\sum_{k=1}^n kx\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^n\ln(1+kx)\leq\frac{n(n+1)}{2}x\ \Rightarrow\ \int_0^1\sum_{k=1}^n\ln(1+kx)dx\leq\frac{n(n+1)}{4}$. **(10 p)**

Subiectul IV. (20 puncte)

$F(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{f(x)\cdot\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow e^{F(x)}\cdot f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow\left(e^{F(x)}\right)'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **(10 p)**

Deci $e^{F(x)}=x+\sqrt{x^2+1}+C,\ F(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **(10 p)**