OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A IX-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ def prin $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = 2\sqrt{a_{n+1} \cdot a_n} - a_n + 1$, $n \geq 1$. Să se arate că $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + 4\sqrt{a_k \cdot a_{k-1}}}$

Florin Rotaru , Focșani (GMB nr.9/2014)

2. Fie $a,\ b \in \mathbb{R},\ a \geq -\frac{18}{15},\ b \geq -\frac{7}{10}$ astfel încât $3a + 2b = 17$ și expresia

$$E(a,b) = 3\sqrt{15a+8} + 4\sqrt{10b+7}.$$

a) Pentru $a = 3$ să se demonstreze că $E(a,b) < 50$;

b) Să se determine maximul expresiei $E(a,b)$ și valorile numerelor a, b pentru care se atinge acest maxim .

Olimpiada locală , Botoșani 2014

3. Pentru fiecare număr natural n definim mulțimile: $A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + [x] \leq n\}$ și $B_n = \{x \in \mathbb{R} | [x^2] + x \leq n\}$. Demonstrați că $A_n \subset B_{n+1}$ și $B_n \subset A_{n+1}$.

4. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și $M \in (AC),\ N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Pentru ce valori ale lui r punctele B, M, N sunt coliniare ?

Manual clasa a – IX – a

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A IX-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se scad relațiile $a_{n+1}=2\sqrt{a_{n+1}a_n}-a_n+1$, și $a_n=2\sqrt{a_na_{n-1}}-a_{n-1}+1$ și se obține $a_{n+1}-a_{n-1}=2\sqrt{a_n}\cdot\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_{n-1}}\right)$	1p
Rezultă $\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_{n-1}}=2\sqrt{a_n}$, deci șirul $\left(\sqrt{a_n}\right)_{n\geq 0}$ e progresie aritmetică	2p
$\sqrt{a_0}=0, \sqrt{a_1}=1 \Rightarrow r=1$, deci $\sqrt{a_n}=a_0+nr=n$, adică $a_n=n^2, n\geq 0$..................	1p
$\sqrt{1+4\sqrt{a_ka_{k-1}}}=\sqrt{1+4k\cdot(k-1)}=\sqrt{(2k-1)^2}=2k-1$	1p
$a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-n=n(n+1)-n=n^2$	2p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow E(a,b)=3\sqrt{53}+4\sqrt{47}$	1p
$3\sqrt{53}<22$, $4\sqrt{47}<28\Rightarrow E(3,4)<50$	2p
b) Aplică inegalitatea CBS și obține: $\left(3\sqrt{15a+8}+4\sqrt{10b+7}\right)^2\leq(3^2+4^2)(15a+8+10b+7)$ $\Rightarrow \left(E(a,b)\right)^2\leq 25\cdot\left(15+5(3a+2b)\right)$ $\Rightarrow E(a,b)\leq\sqrt{25(15+5\cdot 17)}=50$	2p
Avem egalitate dacă $\frac{\sqrt{15a+8}}{3}=\frac{\sqrt{10b+7}}{4}\Leftrightarrow\frac{15a+8}{9}=\frac{10b+7}{16}=\frac{15a+8+10b+7}{25}=4$ de unde rezultă $a=\frac{28}{15}$ și $b=\frac{57}{10}$	2p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x-1<[x]\leq x\ ,x^2-1<[x^2]\leq x^2\ (\forall)x\in R$...	1p
Fie $x\in A_n\Rightarrow n\geq x^2+[x]>x^2+x-1$, de unde $n+1>x^2+x\geq[x^2]+x$ deci $x\in B_{n+1}$, adică $A_n\subset B_{n+1}$	3p
Fie $\in B_n\ \Rightarrow n\geq x+[x^2]>x+x^2-1$, de unde $n+1>x^2+x\geq x^2+[x]$ deci $x\in A_{n+1}$, adică $B_n\subset A_{n+1}$...	3p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v_1}$ și $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v_2}$. Atunci din $\Delta ABC\Rightarrow\ \overrightarrow{BM}=(r-1)\overrightarrow{v_1}+r\cdot\overrightarrow{v_2}$	1p
Dacă O este mijlocul lui $BE\Rightarrow ABCO$= romb, deci $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=$ =2 $\cdot(\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_1})$	2p
Din $\Delta\ BCE\Rightarrow\overrightarrow{BN}=(1-r)\overrightarrow{BC}+r\cdot\overrightarrow{BE}=-2r\cdot\overrightarrow{v_1}+(1+r)\cdot\overrightarrow{v_2}$	2p
$\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{BN}$ vectori coliniari $\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\alpha\cdot\overrightarrow{BN}\Rightarrow\ \frac{r-1}{-2r}=\frac{r}{r+1}$	1p
Obține $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1p
Soluție alternativă: Punctele B, M, N sunt coliniare $\Leftrightarrow\ A[BMC]+A[CMN]=A[BCN]$	