



CLASA a IX-a

Subiectul 1: a) Demonstrați identitatea

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{(x+y)^2}{a+b} = \frac{(bx-ay)^2}{ab(a+b)}.$$

b) Rezolvați ecuația

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} = \frac{(x+x^2)^2}{5}.$$

Subiectul 2: a) Arătați că pentru orice x real are loc inegalitatea

$$\left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \leq 1.$$

b) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor reale

$$\left[\frac{2x}{x^2+1} \right] = \left[\frac{x}{2} \right].$$

Subiectul 3: a) Să se demonstreze identitatea Botez-Catalan

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

b) Fie p și q numere naturale astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}. \text{ Demonstrați că } 1979 \text{ divide pe } p.$$

Subiectul 4: Considerăm paralelogramul $ABCD$ cu $AB=a$, $BC=c$ și $BD=b$ și fie $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 2MC$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABD , I centrul cercului înscris în triunghiul BCD , iar punctele G , I și M sunt coliniare, arătați că $4a = 2b + 5c$.

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.