OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a VI-a

1. Se dă proporţia $\dfrac{x-13}{y} = \dfrac{x}{y+14}$, în care x şi y sunt numere naturale nenule. Arătaţi că 13 divide pe x şi 14 divide pe y.

Gazeta Matematică 11/2015.

2. Să se determine tripletele (x, y, z) de numerele naturale care verifică relaţia

$$\left(2^x+1\right)\cdot\left(3^y+4\right)\cdot\left(4^z-3\right)=2015.$$

Ciocîrlan Ioana

3. Imaginea de mai jos reprezintă un evantai japonez cu 10 nervuri. Unghiul dintre două nervuri alăturate (pe care le vom presupune fără grosime) are măsura de $15°$.

   a) Câte nervuri are un evantai japonez cu proprietatea că, la aceeaşi deschidere (acelaşi unghi dintre nervurile extreme) cu evantaiul din imagine, măsura unghiului dintre două nervuri alăturate este de $11°15'$?

   b) Câte tipuri de evantaie japoneze au proprietatea că, la o deschidere în semicerc (unghiul dintre nervurile extreme alungit), măsura unghiului dintre două nervuri alăturate, exprimată în grade, este un număr întreg cuprins între 16 şi 32?

Dorina Rapcea

4. Fie trei naturale nenule x, y şi z, cu $x > z$.

   a) Dacă $7x - 5y + 28z = 0$, atunci numărul $y(x - z)$ este divizibil cu 35.

   b) Să se determine x, y şi z ştiind că sunt numere prime mai mici decât 20, astfel încât numărul $y(x - z)$ este divizibil cu 35.

Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a VI-a

1. Se dă proporţia $\dfrac{x-13}{y} = \dfrac{x}{y+14}$, în care x şi y sunt numere naturale nenule. Arătaţi că 13 divide pe x şi 14 divide pe y.

Gazeta Matematică 11/2015.

Soluţie.
Avem $xy = (x-13)(y+14)$, sau $13y + 13 \cdot 14 = 14x$. **(1p)**
Din $13|(13y)$ şi $13|(13 \cdot 14)$ rezultă că $13|(14x)$. Cum $(13, 14) = 1$, obţinem $13|x$. **(3p)**
Din $14|(14x)$ şi $14|(13 \cdot 14)$ rezultă că $14|(13y)$. Dar $(13, 14) = 1$, deci $14|y$. **(3p)**

2. Să se determine tripletele (x, y, z) de numerele naturale care verifică relaţia

$$\left(2^x + 1\right) \cdot \left(3^y + 4\right) \cdot \left(4^z - 3\right) = 2015.$$

Ciocîrlan Ioana

Soluţie.
Numărul 2015 se descompune în factori primi astfel: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. **(1p)**
Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left(2^x + 1\right) \cdot \left(3^y + 4\right) \cdot \left(4^z - 3\right) = 2015$.
Urmărind mulţimea divizorilor lui 2015, deducem $2^x + 1 = 5$ sau $2^x + 1 = 65$. **(2p)**
1) Dacă $2^x + 1 = 5$, atunci $x = 2$ şi $\left(3^y + 4\right) \cdot \left(4^z - 3\right) = 13 \cdot 31 = 403$. Atunci, unica posibilitate este ca $4^z - 3 = 13$. Rezultă $z = 2$ şi $y = 3$. Deci tripletul $(2, 3, 2)$ verifică relaţia din enunţ. **(2p)**
2) Dacă $2^x + 1 = 65$, atunci $x = 6$ şi $\left(3^y + 4\right) \cdot \left(4^z - 3\right) = 31 \cdot 31$. Obţinem $z = 1$ şi $y = 3$, deci tripletul $(6, 3, 1)$ verifică relaţia din enunţ. **(2p)**

3. Imaginea de mai jos reprezintă un evantai japonez cu 10 nervuri. Unghiul dintre două nervuri alăturate (pe care le vom presupune fără grosime) are măsura de 15°.

a) Câte nervuri are un evantai japonez cu proprietatea că, la aceeaşi deschidere (acelaşi unghi dintre nervurile extreme) cu evantaiul din imagine, măsura unghiului dintre două nervuri alăturate este de $11°15'$?

b) Câte tipuri de evantaie japoneze au proprietatea că, la o deschidere în semicerc (unghiul dintre nervurile extreme alungit), măsura unghiului dintre două nervuri alăturate, exprimată în grade, este un număr întreg cuprins între 16 şi 32?

Dorina Rapcea

Soluţie.

a) Deschiderea evantaiului, măsurată în grade, este de $15°(10-1) = 135°$. **(1p)**
Evantaiul cu proprietatea că, la aceeaşi deschidere cu cel din imagine, măsura unghiului dintre două nervuri alăturate este de $11°15'$, are $\dfrac{135°}{11°15'} + 1 = 13$ nervuri. **(2p)**

b) Deoarece unghiul alungit are măsura $180°$, măsura în grade a unghiului dintre două nervuri alăturate ar trebuie să fie un divizor al numărului 180. **(1p)**
Mulţimea divizorilor lui 180 cuprinşi între 16 şi 32 este $\{18, 20, 30\}$. **(2p)**
Deci există 3 tipuri de evantaie japoneze au proprietatea din enunţ. **(1p)**

4. Fie trei naturale nenule x, y şi z, cu $x > z$.

   a) Dacă $7x - 5y + 28z = 0$, atunci numărul $y(x - z)$ este divizibil cu 35.

   b) Să se determine x, y şi z ştiind că sunt numere prime mai mici decât 20, astfel încât numărul $y(x - z)$ este divizibil cu 35.

Dorina Bocu

Soluţie.

a) Din $7(x + 4z) = 5z$ rezultă $7|(5y)$. Dar $(5, 7) = 1$, deci $7|y$. **(1p)**
Avem $5(y - 7z) = 7(x - z)$, de unde $5|[7(x - z)]$. Dar $(5, 7) = 1$, deci $5|(x - z)$. **(1p)**
Din cele două relaţii rezultă că $y(x - z) \vdots 35$. **(1p)**

b) Deoarece, pe baza ipotezei, $x - z < 35$, trebuie ca $5|y$ sau $7|y$. Cum y este prim, rezultă $y \in \{5, 7\}$. **(1p)**

Dacă $y = 5$, atunci $7|(x - z)$, de unde $(x - z) \in \{7, 14\}$. Obţinem soluţiile $(17, 5, 3)$ şi $(19, 5, 5)$.

Dacă $y = 7$, atunci $5|(x - z)$, de unde $(x - z) \in \{5, 10, 15\}$. Obţinem soluţiile $(7, 7, 2)$, $(17, 7, 7)$ şi $(17, 7, 2)$. **(3p)**