OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

Fie numerele reale x și y, astfel încât $x + y \geq 3$.

a) Arătați că $(x+1)^2 + (y+1)^2 > 12$.

b) Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x-1)^4 + (y+2)^4$.

SUBIECTUL II

a) Fie numerele raționale pozitive x și y, astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ este număr rațional. Arătați că $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ sunt numere raționale.

b) Rezolvați în $N \times N$ ecuația: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}-2} = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL III

Considerăm piramida *VABC*, cu baza triunghiul *ABC* echilateral. Semidreptele *[AX*, *[BY*, *[CZ* sunt bisectoare ale unghiurilor $\widehat{VAB}$, $\widehat{VBC}$, respectiv $\widehat{VCA}$,unde $X \in (VB)$, $Y \in (VC)$ și $Z \in (VA)$. Arătați că piramida este regulată dacă și numai dacă planele *(ABC) și (XYZ)* sunt paralele.

SUBIECTUL IV

Fie *VA*, o dreaptă perpendiculară pe planul unui triunghi *ABC*, cu $m(\hat{A}) = 90^0$, $m(\hat{B}) = 75^0$, BC = $4(\sqrt{3}+1)$ cm și $VA = 25\% \cdot BC$. Să se afle:

a) Distanța de la punctul V la dreapta BC.

b) Distanța dintre dreptele AC și VB.

(Considerăm cunoscut faptul că $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA A VIII-A

Problema 1.

Problema1	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	$(x+y)^2 \geq 9$	1
	$x^2+y^2 \geq \frac{9}{2}$	2
	$2x+2y \geq 6$	1
	$(x+1)^2+(y+1)^2 \geq \frac{9}{2}+6+2>12$	1
b)	Folosind inegalitatea: $2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2$	
	$(x-1)^4+(y+2)^4 \geq \frac{1}{2}[(x-1)^2+(y+2)^2]^2$	1
	$\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x-1+y+2)^4 \geq \frac{1}{8}\cdot 4^4=32$	1

Problema 2.

Problema2	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	$\sqrt{x}=r-\sqrt{y}$	1
	$x=r^2-2r\sqrt{y}+y$	1
	$\sqrt{y}=\frac{r^2+y-x}{2r} \in Q$	2
b)	Aducerea la forma $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$	1
	Conform a) rezultă $\sqrt{x},\sqrt{y} \in N$	1
	(x,y)$\in \{(1,36),(4,25),(9,16),(16,9),(25,4),(36,1)\}$	1

Problema 3.

Problema3	Etapa de rezolvare	Punctaj
	Conform teoremei bisectoarei in ABV avem $\frac{VX}{XB}=\frac{VA}{AB}$	1
→	$\frac{VA}{AB}=\frac{VB}{BC}=\frac{VC}{CA} \rightarrow \frac{VX}{XB}=\frac{VY}{YC}=\frac{VZ}{ZA}$	2
	XY ‖ BC si XZ ‖ AB → (ABC) ‖ (XYZ)	1
←	(ABC) ‖ (XYZ) → $\frac{VA}{AB}=\frac{VB}{BC}=\frac{VC}{CA}$	2
	AB=BC=CA → VA=VB=BC → piramida regulata	1

Problema 4.

Problema4	Etapa de rezolvare	Punctaj
a)	AT ⊥ BC, AT= $\sqrt{3}+1$	2
	d(V, BC)= VT= $(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$	1
b)	AB = BC sin 15= $2\sqrt{2}$	1
	AU ⊥ VB deci d(AC, VB)= AU	2
	AU=$\frac{VA\cdot AB}{VB}$, calcul algebric	1