OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, oricare ar fi k număr natural nenul.

b) Fie $p = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 100}$. Aflaţi zecimea din scrierea zecimală a numărului p.

c) Arătaţi că $\frac{1}{2\sqrt{2013}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{4025}{4026} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$.

SUBIECTUL al II-lea

a) Determinaţi numărul real a, ştiind că $\sqrt{5(a-6)^2} = 20$.

b) Calculaţi $\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

c) Determinaţi numerele raţionale x şi y, astfel încât

$$\frac{\sqrt{25(x-6)^2 - 10\sqrt{1006009}}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{9(y+2)^2 - 30\sqrt{40401}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

SUBIECTUL al III-lea

Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ şi punctele E, F, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, respectiv, $[BD]$.

Demonstraţi că:

a) Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram.

b) Dreptele ME, NF, PR sunt concurente.

c) $ON + OF = \frac{AD+BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB+CD}{2}$.

SUBIECTUL al IV-lea

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, $[AD]$ este mediană cu $D \in (BC)$ şi $E \in (AB)$, astfel încât $CE \perp AB$. Fie $AD \cap CE = \{T\}$ şi $BT \cap AC = \{F\}$. Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi BC. Să se arate că:

a) $BC = 2 \cdot DF$;

b) $DE^2 = \frac{BE \cdot AB}{2}$;

c) $\frac{1}{CG} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$, oricare ar fi k număr natural nenul.

b) Fie $p=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100}$. Aflaţi zecimea din scrierea zecimală a numărului p.

c) Arătaţi că $\frac{1}{2\sqrt{2013}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{4025}{4026}<\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) Deoarece $2k>0$ *şi* $2k+1>0$, $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}\Leftrightarrow(2k-1)(2k+1)<2k\cdot 2k\Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow 4k^2-1<4k^2$, ceea ce este evident adevărat. ……….1 punct

b) Conform subpunctului **a)**, putem scrie succesiv:

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3};\frac{3}{4}<\frac{4}{5};\frac{5}{6}<\frac{6}{7};\ldots;\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$.

Înmulţind inegalităţile, membru cu membru, obţinem:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$ ……….1 punct

$p<\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{101}\Leftrightarrow p^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$ şi cum $p>0\Rightarrow p<\frac{1}{10}\Leftrightarrow p<0{,}1$

Zecimea din scrierea zecimală a numărului p este 0. ……….1 punct

c) Fie $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{4025}{4026}$ şi $b=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{4024}{4025}$. Se arată că $a>b$. ....1 punct

Din $a>b\Rightarrow a^2>ab\Leftrightarrow a^2>\frac{1}{4\cdot 2013}\Rightarrow a>\frac{1}{2\sqrt{2013}}$ ....1 punct

Fie $c=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{4024}{4025}$

Obţinem $a<c\Rightarrow a^2<ac\Leftrightarrow a^2<\frac{3}{8\cdot 2013}\Rightarrow a<\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$. ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al II-lea

a) Determinaţi numărul real a, ştiind că $\sqrt{5(a-6)^2}=20$.

b) Calculaţi $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

c) Determinaţi numerele raţionale x şi y, astfel încât

$$\frac{\sqrt{25(x-6)^2-10\sqrt{1006009}}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{9(y+2)^2-30\sqrt{40401}}}{\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\sqrt{5(a-6)^2}=20 \Leftrightarrow |a-6|\sqrt{5}=20 \Leftrightarrow$ ....1 punct

$|a-6|=4\sqrt{5} \Rightarrow a-6=4\sqrt{5}$ *sau* $a-6=-4\sqrt{5} \Rightarrow a \in \left\{6-4\sqrt{5};\,6+4\sqrt{5}\right\} \subset \mathbb{R}$. ....1 punct

b) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ....1 punct

$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$. Suma este egală cu $2\sqrt{5}$. ....1 punct

c) $\dfrac{5|x-6|-10\cdot 1003}{\sqrt{5}}-\dfrac{3|y+2|-30\cdot 201}{\sqrt{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$|x-6|\sqrt{5}-2007\sqrt{5}=|y+2|\sqrt{3}-2011\sqrt{3}$

$|x-6|\sqrt{15}-2007\sqrt{15}=3|y+2|-2011\cdot 3;$

$$\left.\begin{array}{l}(|x-6|-2007)\sqrt{15}=3(|y+2|-2011)\\ \forall y\in\mathbb{Q}\Rightarrow 3(|y+2|-2011)\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow(|x-6|-2007)\sqrt{15}\in\mathbb{Q}$$ ....1 punct

$$\left.\begin{array}{l}(|x-6|-2007)\sqrt{15}\in\mathbb{Q}\\ \forall x\in\mathbb{Q}\Rightarrow(|x-6|-2007)\in\mathbb{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow|x-6|-2007=0\Rightarrow x\in\{-2001;2013\}\subset\mathbb{Q}$$ ....1 punct

$$\left.\begin{array}{l}(|x-6|-2007)\sqrt{15}=3(|y+2|-2011)\\ (|x-6|-2007)=0\end{array}\right\}\Rightarrow|y+2|-2011=0\Rightarrow y\in\{-2013;2009\}\subset\mathbb{Q}$$

Problema admite 4 soluţii: $(x;y)\in\{(-2001;-2013),(-2001;2009),(2013;-2013),(2013;2009)\}$ ...1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al III-lea

Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ şi punctele E, F, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, respectiv, $[BD]$. Demonstraţi că:

a) Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram.

b) Dreptele ME, NF, PR sunt concurente.

c) $ON + OF = \frac{AD+BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB+CD}{2}$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle ACD \Rightarrow MN \parallel AC$ *şi* $MN = \frac{1}{2}AC$ ……….1 punct

Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram. ……….1 punct

b) $MNEF$ este paralelogram $\Rightarrow \exists\, O$ *a.î.* $ME \cap NF = \{O\}$, cu O mijlocul segmentului $[NF]$ ….1 punct

$FRNP$ este paralelogram $\Rightarrow PR$ trece prin O, mijlocul segentului $[NF]$ ….1 punct

c) "$\Rightarrow$"

1) Dacă $m(\sphericalangle AOD) < 90^0$. Fie $T \in (NO$ a.î. $NT = NA$;

Din $\left.\begin{array}{l}[TN] \text{ este mediană în } \triangle ATD \\ TN = \frac{1}{2}AD\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ATD$ este dreptunghic în T

$m(\sphericalangle ATD) = 90^\circ = m(\sphericalangle ATN) + m(\sphericalangle DTN) > m(\sphericalangle AOT) + m(\sphericalangle DOT) = m(\sphericalangle AOD) \Rightarrow T \in (ON)$

Analog, fie $Q \in (FO$ a.î. $OF = FB$; Obţinem $Q \in (OF)$ *şi* $m(\sphericalangle BQC) = 90^\circ$;

Atunci $ON + OF > TN + QF = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$, ceea ce reprezintă o contracţie. ……….1 punct

2) Dacă $m(\sphericalangle AOD) > 90^0$., ajungem la aceeaşi contradicţie.

Deci $m(\sphericalangle AOD) = 90^0 \Rightarrow \triangle DOC$ *şi* $\triangle AOB$ sunt dreptunghice cu $[OM]$, respectiv $[OE]$ mediane.

Atunci $OM + OE = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}AB = \frac{AB+CD}{2}$. ……….1 punct

"$\Leftarrow$"

Se tratează analog ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, $[AD]$ este mediană cu $D \in (BC)$ şi $E \in (AB)$, astfel încât $CE \perp AB$. Fie $AD \cap CE = \{T\}$ şi $BT \cap AC = \{F\}$. Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi BC.

Să se arate că:

a) $BC = 2 \cdot DF$; b) $DE^2 = \dfrac{BE \cdot AB}{2}$; c) $\dfrac{1}{CG} - \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AC}$

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$ cu $[AD]$ mediană AD este înălţime în $\triangle ABC$

$$\left.\begin{array}{l} AD \text{ este înălţime în } \triangle ABC \\ CE \text{ este înălţime în } \triangle ABC \\ AD \cap CE = \{T\} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ este ortocentrul } \triangle\text{-lui } ABC$$ ……….1 punct

Atunci BF este înălţime în $\triangle ABC \Rightarrow \triangle BFC$ este dreptunghic în F

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BFC \text{ dr. în } F \\ [FD] \text{ este mediană} \end{array}\right\} \Rightarrow FD = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow BC = 2FD.$$ ……….1 punct

b) $\triangle ADB \sim \triangle CEB (U.U.) \Rightarrow \dfrac{AD}{CE} = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{BC}$ ……….1 punct

$[DE]$ este mediană în $\triangle EBC$ dr. în $E \Rightarrow DE = BD$

$$\frac{DE}{BE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2BD} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2DE} \Rightarrow DE^2 = \frac{AB \cdot BE}{2}$$ ……….1 punct

c) Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB şi $BC \Rightarrow (BG$ este este bisectoare în $\triangle ABC$; ……….1 punct

$[BG$ este bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{CG}{GA} = \dfrac{BC}{AB}$ ……….1 punct

$$\frac{CG}{GA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CG}{GA + CG} = \frac{BC}{AB + BC} \Rightarrow \frac{CG}{AC} = \frac{BC}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB + BC}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} - \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{CG} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC}.$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.