Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală a județului Alba, 19 februarie 2016
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numerele:

$$x = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2015^2 \text{ și } y = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2016^2$$

Folosind, eventual, relația $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, calculați numărul:

A = $(y-x)[y+x-(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 2015\cdot 2016)]$

Soluție:

$y - x = 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + 6^2 - 5^2 + \cdots 2016^2 - 2015^2$ 1p

$y - x = 3 + 7 + 11 + \cdots + 4031, (4031+1):4 = 1008\ termeni$ 1p

$y - x = (4131 + 3)\cdot 1008 : 2 = 2017 \cdot 1008$ 1p

$y + x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 2015^2 + 2016^2$ 1p

$y + x = 1\cdot(2-1) + 2\cdot(3-1) + 3\cdot(4-1) + \cdots + 2016\cdot(2017-1)$

$y + x = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 2016\cdot 2017 - (1+2+3+\cdots+2016)$ 1p

$notăm: p = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 2015\cdot 2016$

$A = 2017\cdot 1008 : [p + 2016\cdot 2017 - (1+2+3+\cdots+2016) - p]$ 1p

$A = 2017\cdot 1008 : (2016\cdot 2017 - 2016\cdot 1008) = 1$ 1p

Problema 2. Se consideră trapezul ABCD cu AB || CD, AB > CD și AC ⊥ BD. Fie E mijlocul diagonalei [AC]. Paralela prin E la BD intersectează ~~pe~~ AB în M. Demonstrați că:

a) ΔAMC este isoscel;

b) $ME = \frac{BD}{2}$ și $CM = \frac{AB+CD}{2}$;

Soluție:

a) În ΔAMC: ME – mediană și înălțime $\Longrightarrow \Delta AMC$ – isoscel cu $[AM] \equiv [MC]$ 2p

b) Fie CT||BD, T∈(AB, EM – linie mijlocie în $\Delta ACT \Longrightarrow EM = \frac{CT}{2}$ 2p

BTCD – paralelogram $\Longrightarrow [CT] \equiv [BD] \Longrightarrow EM = \frac{BD}{2}$ 1p

BTCD – paralelogram $\Longrightarrow [DC] \equiv [BT] \Longrightarrow$ AT = AB + DC 1p

ΔACT – dreptunghic, CM – mediană $\Longrightarrow CM = \frac{AT}{2} = \frac{AB+DC}{2}$ 1p

Problema 3. a) Arătați că are loc relația: $\frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1} = \frac{2^k}{(2^k+1)\cdot(2^{k+1}+1)}$; $(\forall) k \in \mathbb{N}$.

b) Aflați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât: $\frac{2}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \frac{8}{9\cdot 17} + \cdots + \frac{2^n}{(2^n+1)\cdot(2^{n+1}+1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2015}}{2^{2016}+1}$;

Soluție:

a) aducerea la același numitor 1p

finalizare 1p

b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2015}-1}{2^{2016}+1}$ 1p

după simplificare se obține: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2015}-1}{2^{2016}+1}$ 1p

aducerea la același numitor $\frac{2(2^n-1)}{3(2^{n+1}+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2015}-1}{2^{2016}+1}$ 2p

finalizare n = 2015 .... 1p

Problema 4. În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB]\equiv[AC]$, se consideră bisectoarele (AD, respectiv (CE cu D ∈ (BC), E ∈ (AB) și punctul F, mijlocul lui (AC), astfel încât EF⊥ AC,

a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Arătați că triunghiul ABP este isoscel, unde AD ∩ EF = {P}.

Gazeta matematică, nr. 9/2015

Soluție:

figura corespunzătoare enunțului 1p

a) În ΔEAC: $[AF]\equiv[FC]$ și $EF\perp AC \Longrightarrow \Delta EAC - isoscel\ cu\ [AE]\equiv[EC]$ 1p

notăm $m(\measuredangle BAC)=m(\measuredangle ACE)=a$ și $(CE-bis.\measuredangle BCA \Rightarrow m(\measuredangle ACB)=m(\measuredangle ABC)=2a$ 1p

aflarea lui $a=36°$ 1p

$m(\measuredangle A)=36°, m(\measuredangle B)=m(\measuredangle C)=72°$ 1p

b) ducem PM ⊥ AB, $\Delta APM\equiv\Delta APF$(I.U.)⟹AM=AF=$\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}\Longrightarrow[AM]\equiv[MB]$ 1p

$\Delta AMP\equiv\Delta BMP$ (C.C.) $\Longrightarrow[AP]\equiv[BP]\Longrightarrow\Delta ABP - isoscel$ 1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.