Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_2(C)$.Arătaţi că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, pentru orice $x \in C$.

3puncte

b) Dacă $A \in M_2(C)$ cu $TrA = 2$ şi $\det A = 3$ demonstrați că:

$2 \cdot \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$ 4 puncte

prof. Traian Tămîian, Carei

2. Dacă A,B∈ $M_2(C)$ astfel încât det(AB+BA)-det(AB-BA)=4·detA·detB, să se arate că:

a.) det(AB-BA)=0 4 puncte

b.) $(AB - BA)^2 = O_2$ 3 puncte

prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

3. Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ unde $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} + 2, daca\ n\ este\ par \\ a_n + \frac{2}{n}, daca\ n\ este\ impar \end{cases}$.

Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 7 puncte

RMT

4. Se consideră şirul de numere naturale $(a_n)_{n\ge 1}$,unde a_1=2 şi $a_{n+1} = \frac{2n+3-n!\cdot a_n}{(n+1)!}, n \ge 1.$

a.) Arătați că şirul este convergent. 4 puncte

b.) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln[(n-1)!\cdot a_n]$ 3 puncte

prof. Bud Adrian, Negreşti-Oaş

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

Barem de corectare

1.) a.) se arată prin calcul direct că: $\det(A-xI_2)=x^2-(TrA)x+\det A$…………………………..3 puncte

b.) Din teorema Hamilton-Cayley rezultă $A^2-2A+3I_2=O_2$, de unde $A^2+3I_2=2A$ (1)....1 punct

se arată că $\det(A^2+3I_2)=\det(2A)=2^2\det A=12$ (2)..1 punct

din $A^2+I_2=2(A-I_2)$, se obține $\det(A^2+I_2)=2^2\det(A-I_2)=2^2\cdot 2=8$ (3).......................1 punct

Din (2) și (3) obținem: $2\cdot\det(A^2+I_2)-\det(A^2+3I_2)=2\cdot 8-12=4$. ....1 punct

2.) a.) se folosesc relațiile:

(1) $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\cdot(\det X+\det Y)$

(2) $\mathbf{det}(X\cdot Y)=\det(Y\cdot X)=\det X\cdot\det Y$ pentru scrierea lor.... 2 puncte

punând în relatia (1) X=AB și Y=BA și folosind (2) se obtine

(3) $\det(AB+BA)+\det(AB-BA)=4\det A\cdot\det B$.......................................1 punct

Din (3) si identitatea din enunt se obtine cerința punctului a)..............................1punct

b.) se folosește relația $X^2-(TrX)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$, oricare ar fi $X,Y\in M_2$..... ....1 punct

în care se pune X=AB-BA si avem

$(AB-BA)^2-(Tr(AB-BA))(AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=O_2$ (3)

dar $Tr(AB-BA)=0$ si tinand seama rezultatul de la a), din (3) rezulta b). …..2 puncte

3.) $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$ ……………………………………………………..……..1 punct

$a_{2k+2}=a_{2k+1}+\frac{2}{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2+\frac{2}{2k+1}$ ....1 punct

$a_2=3$, $a_3=\frac{7}{2}$, $a_4=\frac{25}{6}$ ....1 punct

se arată prin inducție că $a_{2k}\in(0,5)$ ....2 puncte

cum $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$, rezultă că EMBED Equation.3 . ...1 punct

de unde

 EMBED Equation.3 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ ……………………………………………………..…… 1 punct

4.) a.) se arată prin inducție că $a_n=\frac{n+1}{n!}$ ………………………………… …………... 2 puncte

demonstrarea că șirul este descrescător……………………………………….…….1 punct

$(a_n)_{n\geq 1}$ strict pozitiv, deci mărginit inferior,

Prin urmare șirul este convergent ………………………………………….……..1 punct b.) Înlocuim a_n cu $\frac{n+1}{n!}$. Limita devine:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left[(n-1)!\cdot a_n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n = \ln e = 1$ .... 3 puncte