OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A XI-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $A^2 \cdot B^2 \in M$;

b) Există matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2015} = -I_2$? Justificați răspunsul .

Manual clasa a-XI-a , Editura Carminis

2. Considerăm șirul de numere reale $(u_n)_{n\geq 0}$ definit prin $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita sa .

Gazeta Matematică

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB = BA$, $det(A) = -3$ și $det(A + \sqrt{3}B) = 0$. Calculați $det(A^2 + B^2 - AB)$.

Olimpiada locală , Constanța 2014

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq -2$. Să se determine pentru ce valori ale constantelor a, b avem $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+a} - b}{x^2+2x-3} = \frac{3}{16}$.

C.d.p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $A = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x \neq 0 \Rightarrow A^2 = A$	1p
Deci $A, B \in M \Rightarrow A^2 \cdot B^2 = AB = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix}$	1p
$\Rightarrow A^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix}, xy \neq 0 \Rightarrow A^2 \cdot B^2 \in M$	2p
b) $A^2 = A \Rightarrow A^n = A, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$..	1p
$A^{2015} = A = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} = -I_2$..	1p
$\begin{cases} 2-x = -1 \\ x-1 = 0 \end{cases}$ contradicție! deci nu există $A \in M$ cu proprietatea din enunț	1p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Monotonie: $u_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{7}{4}} = \frac{7}{2} > u_0$	1p
Presupune $u_k > u_{k-1}, (\forall) k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Atunci $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} - \sqrt{u_{n-1} - \frac{7}{4}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n - \frac{7}{4}} + \sqrt{u_{n-1} - \frac{7}{4}}} > 0 \Rightarrow (u_n)_{n \geq o}$ strict crescător	2p
Mărginire : Presupune $u_k < 4, (\forall)\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n \implies u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} < \frac{5}{2} + \sqrt{4 - \frac{7}{4}} = 4$ deci $(u_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior de 4	1p
Deduce că $(u_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $u_n \to l > \frac{11}{4}$	1p
Din relația de recurență rezultă $l = \frac{5}{2} + \sqrt{l - \frac{7}{4}}$	1p
$\Rightarrow l^2 - 6 + 8 = 0 \Rightarrow l \in \{2,4\}$ și pentru că $l > \frac{11}{4}$ $\Rightarrow u_n \to 4$	1p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $p(X) = det(A + X \cdot B)$	1p
$\Rightarrow P(X) = X^2 \cdot det(B) + \alpha \cdot X + det(A)$..	1p
$P(\sqrt{3}) = 3det(B) + \alpha\sqrt{3} - 3 = 0$ (1) $\Rightarrow \alpha\sqrt{3} = 3 - 3det(B)$ și cum $\alpha, det(B) \in \mathbb{Q}$ rezultă că $\alpha = 0$	1p
$\overset{(1)}{\Rightarrow} det(B) = 1$, deci $P(X) = X^2 - 3$	1p
Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$..	1p
$AB = BA \Rightarrow A^2 + B^2 - AB = (A + \varepsilon B) \cdot (A + \varepsilon^2 B)$	1p
$det(A^2 + B^2 - AB) = P(\varepsilon) \cdot P(\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 - 3) \cdot (\varepsilon - 3) = 13$	1p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie $L = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3}$. Dacă $\sqrt{a + 2} \neq b \Rightarrow L \in \{-\infty, \infty\}$	1p
Deci $b = \sqrt{a + 2}$ rezultă că $L = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - \sqrt{a + 2}}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + a} + \sqrt{a + 2}} = \frac{1}{2\sqrt{a + 2}} \cdot \frac{3}{4}$	4p
$L = \frac{3}{16} \Rightarrow \sqrt{a + 2} = 2 \Rightarrow a = 2$...	1p
$b = \sqrt{a + 2} = 2$...	1p