INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a XI-a

PROBLEMA 1

Fie A o matrice pătratică de ordinul n care verifică relația $A^3 = A + I_n$. Să se arate că $\det A > 0$.

(Gazeta matematică)

Soluție: Din relația $A^3=A+I_n$ rezultă

$(A-I_n)(A^2+A+I_n)=A$ *de unde* $\det(A)=\det(A-I_n)\cdot\det(A^2+A+I_n)$ (1) 2p

Dar $A^2+A+I_n=B^2+C^2$, *unde* $B=A+\frac{1}{2}I_n$, $C=\frac{\sqrt{3}}{2}I_n$ 1p

Deoarece matricile B și C comută , rezultă că $\det(A^2+A+I_n)=\det(B^2+C^2)>0$ (2).......1p

Din (1) și (2) obținem $\det(A)\cdot\det(A-I_n)>0$ (3) 1p

Însă $A^3-A=I_n$ *deci* $\det(A)\cdot\det(A+I_n)\cdot\det(A-I_n)=1$ (4)

Din (3) și (4) rezultă și $\det(A+I_n)>0$ (5) 1p

De asemenea din $A^3=A+I_n$ rezultă $(\det(A))^3=\det(A+I_n)$, și ținând cont de (5),
avem în final det(A)>0...1p

PROBLEMA 2

Fie $X,Y\in M_n(\mathbb{R})$ şi $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $XY=aX+bY$. Arătaţi că $XY=YX$.

Soluție: $XY-aX-bY+abI_n= abI_n \Rightarrow (X-bI_n)(Y-aI_n)=abI_n$ (*) 2p

$X - bI_n$ inversabilă...2p

Prin calcul elementar folosind relaţia (*) se ajunge la YX = aX+bY, deci $XY=YX$...........3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

PROBLEMA 3

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $\ln\left(\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{n},\ n\geq 2,\ x_1=1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n\ln(n+1)}$.

Soluție: Relația dată este echivalentă cu $1-\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}=e^{\frac{1}{n}}$, de unde

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=e^{\frac{1}{n}}-1,\ n\geq 2. \text{.......................................2p}$$

Însumând primele $n-1$ egalități se obține:

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}+\ldots+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=e^{\frac{1}{n}}-1+e^{\frac{1}{n-1}}-1+\ldots+e^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_1}=e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{3}}\ldots+e^{\frac{1}{n}}-(n-1),\ \text{deci}\ \frac{1}{x_n}=e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{3}}\ldots+e^{\frac{1}{n}}-n+2.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n\ln(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{3}}\ldots+e^{\frac{1}{n}}-n+2}{\ln(n+1)} = L$..2p

Șirul $a_n=\ln(n+1),\ n\geq 1$ este strict crescător și nemărginit superior, deci se poate aplica teorema Stolz - Cesàro: $L = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\ln(n+2)-\ln(n+1)} =$..1p

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln\frac{n+2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}. \text{.................2p}$$

PROBLEMA 4

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$ trei șiruri de numere reale, cu proprietatea că pentru orice număr natural n are lor relația $a_n+b_n+c_n=1$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2\right)=\frac{1}{3}$, arătați că

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}.$$

Soluție: Avem că $\left(a_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(b_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(c_n-\frac{1}{3}\right)^2=a_n^2+b_n^2+c_n^2-\frac{2}{3}(a_n+b_n+c_n)+3\cdot\frac{1}{9}=$

$$=a_n^2+b_n^2+c_n^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=a_n^2+b_n^2+c_n^2-\frac{1}{3}. \text{........3p}$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(a_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(b_n-\frac{1}{3}\right)^2+\left(c_n-\frac{1}{3}\right)^2\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n-\frac{1}{3}\right)=0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}. \text{........................4p}$$